



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

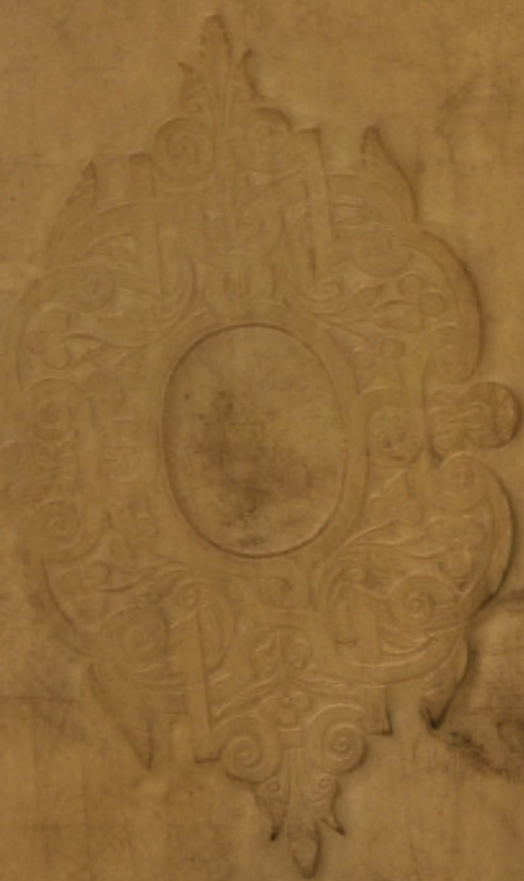
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Math-54

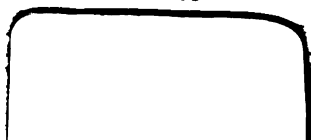
Math 54



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



900000070116

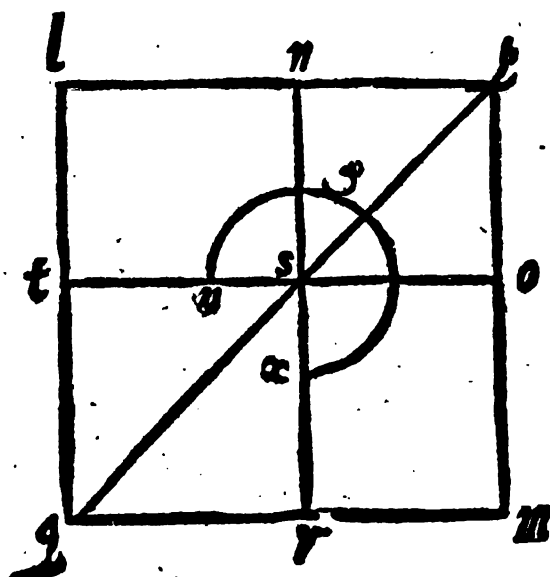


2

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM,

IN QVO
SINGVLARVM DEMONSTRATIONUM
linearum, & superficies, tam Commensurabiles, & Incommensurabiles, Quam Rationales, & Irrationales, accuratè numeris exprimuntur.

AVTHORE
FLORIMONDO PVTEANO,
VATANI DOMINO.



PARISIIS.
Apud IOANNEM DE HEVQVEVILLE, via Iacobæa,
sub Signo Pacis.

M. DCXII.

CVM PRIVILEGIO REGIS.





LECTORI.



LINQVIREs fortassis (benevole Lector), quo ingenio motus, lineas figurarum 10. Euclidis numeris exprimere tentauerim, praesertim cum à nemine id factum esse mihi constet, breui tamen satisfaciam, rationesque, quæ me impulerunt detegam, quarum præcipua fuit amor scientiæ, & veritatis, tum quia in numeris rerum omnium imagines, veluti in speculo clarius inspiciuntur. Igitur cum Algebram, ex Stifelij Algebra didicissem, eamque manu scriptam ab amico traditam vidiissem, quam prius sub vna tantum regula reduxit (quod pater Clauij sit dictum) volui exercitationis gratiâ experiri tentare, an ex iis, quæ ex eo didiceram, librum hunc ad vsum applicare fas esset: Quantum enim ad cognitionem illius, satis ex demonstrationibus Clauij eram edoctus. Sed quoniam (vt ipsemet Clavius dixit) nemini concessum est, hunc 10. Euclidis librum ad vsum reuocare, qui Algebram ignorat. Dubitans etiam adhuc de meo in hac arte ingeniolo, mirum in modum desideravi, hanc provinciam suscipere, vt inde de meis vigiliis hac in re susceptis iudicare possem. Quot sudores, quot labores pertulerim qui exactam huius libri notitiam habuerunt, vel qui hunc Mathematicorum crucem nominauere,

intelligent. Sæpissimè enim fateor, me à proposito quasi deterritum fuisse, spinarum multitudine, & nisi aliquẽ fructum studiosis adferre putassem, certe opus imperfectum reliquissem. Tibi igitur (Beneuole Lector) placere volui, tibi etiam proficere, sicut & mihi, sed vereor ne aliter contingat, neue plus molestiæ, quam iucunditatis aut vtilitatis ex eo suscipias. Quoniam vero propriũ est viri probi, ea ex animo excipere, quæ animo offeruntur, Improbi verò sinistra etiam mente ea, quæ sincera oblata sunt contemnere, Ideo ex probis bene spero, ab improbis verò nihil timeo, nihil etiam desidero. Lege & diligenter examina, & si quos errores in illo deprehendis, libenter emendatos feram, cum illum beatum esse putem, qui cognitione erratorum melior, aut doctior redditur. Hæc tibi, & mihi fælicitas cõtingat. Vale.





E V C L I D I S

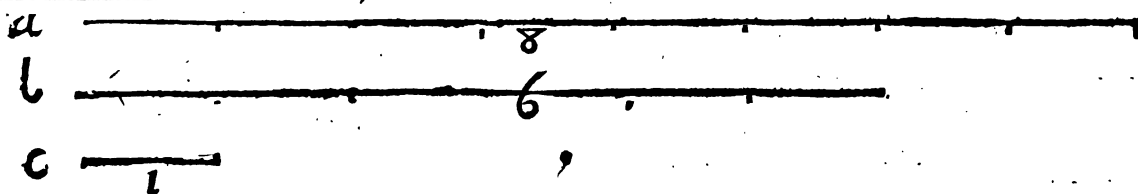
E L E M E N T V M X.

Definitiones.



DEFINITIO I.

COMMENSURABILES magnitudines dicuntur quas eadem mensura metitur.



DUAE magnitudines a , & b , commensurabiles dicuntur quia habent communem mensuram c , quae utramque a , & b , metitur.

EX CLAVIO.

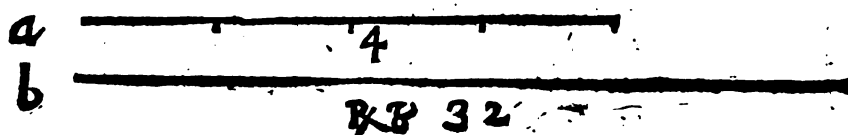
EODEM modo commensurabiles sunt linea 20. palmorum & linea 13. palmorum, Quia eas linea, tam unus palmus, quam dimidiati palmi, quam tertiae partis unius palmi metitur.

Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una & eadem superficies metitur.

Item corpora solidaque, commensurabilia, quae metitur idem corpus seu solidum.

DEFIN. II.

INCOMMENSURABILES autem quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.



INCOMMENSURABILES magnitudines a , & b , quia nullam inter se habent communem mensuram, quae utramque metiri possit.

Rursus superficies dicuntur incommensurabiles, solidaque incommensurabilia, quae nullam communem admittunt mensuram.

EX CLAVIO.

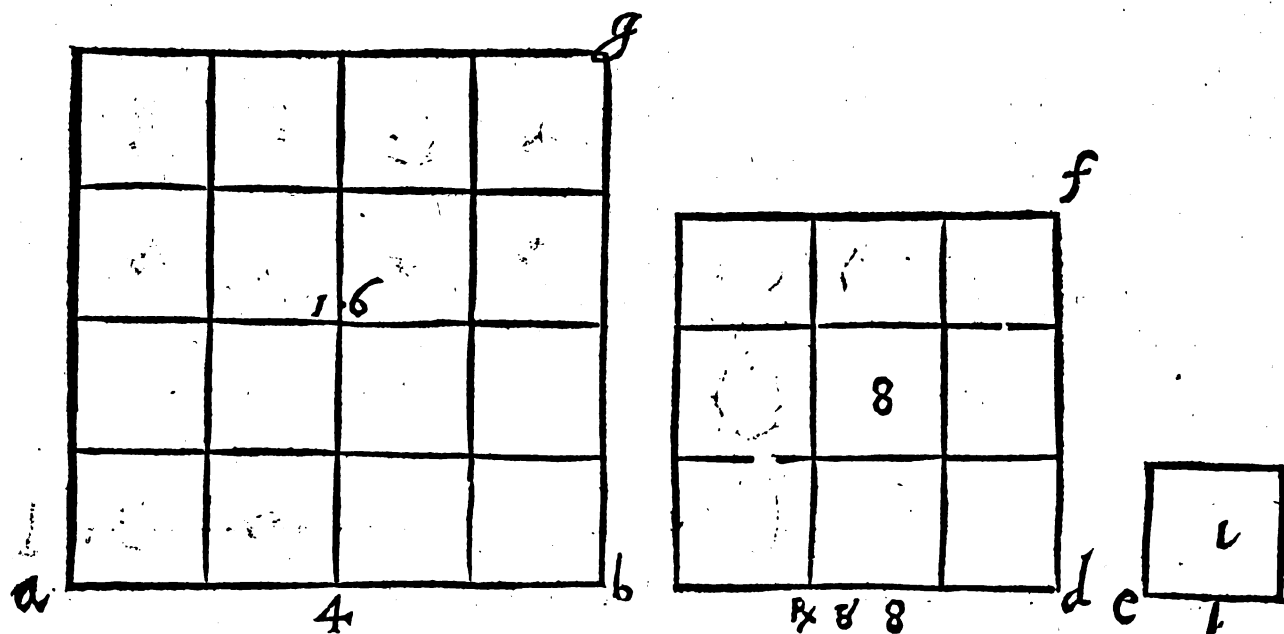
TALES magnitudines sunt diameter quadrati cuiusvis, & latus eiusdem, quoniam nullam habent communem mensuram, ut ex ultima propositione libri huius patet.

A

Sunt etiam quamplurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc libro, Geometria explicat, docetque quam ratione inueniri possint.

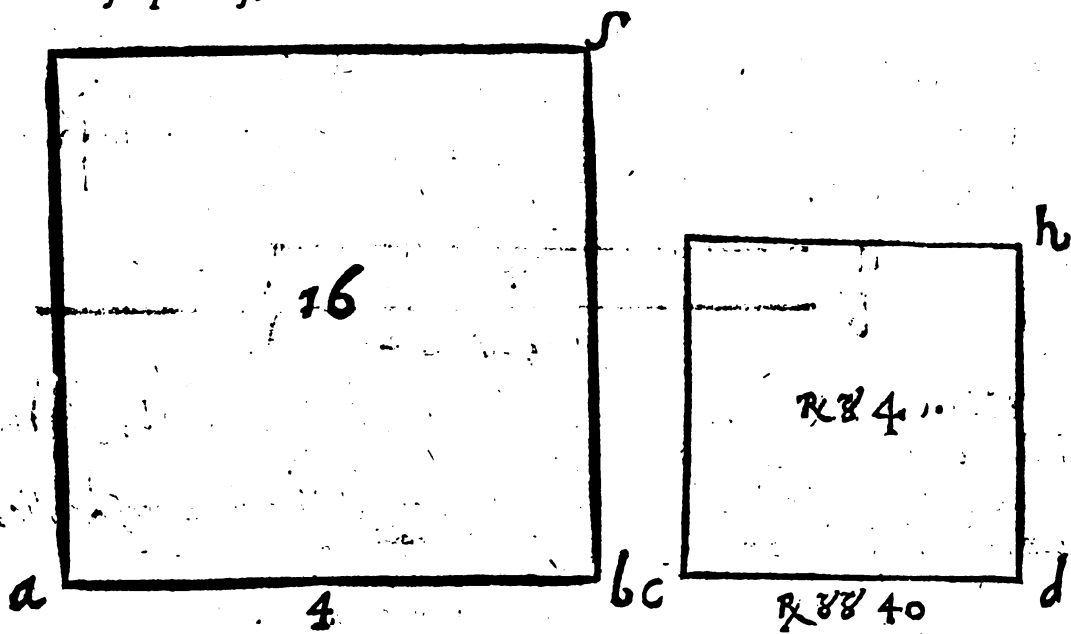
DEFINIT. III.

R E C T Æ lineæ potentia commensurabiles sunt, quando quæ ab ipsis quadrata eadem area dimetitur.



LINEÆ a, b, c, d , potentia sunt commensurabiles, quia earum quadrata habent inter se unam, & eandem communem mensuram, id est unam, & eandem aream nempe e , quæ utrumque quadratum ex illis a, b, c, d , descriptum metitur. Quamvis lineæ illæ inter se sint omnino longitudine incommensurabiles, nec habere possint communem aliquam mensuram utramque a, b, c, d , metientem.

Linearum autem incommensurabilium, alia sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia. Alia verò ita se habent, ut & earum quadrata, sint etiam incommensurabilia, ut quadrata inferius descripta a, f, c, h .



Lineæ enim a, b, c, d , longitudine sunt incommensurabiles, quia nullam habent commu-

ELEMENTVM DECIMVM.

nam mensuram vtramque metientem. Potentia etiam incommensurabiles erunt, quia vt constat ex ista 3. definitione earum quadrata nullam habent aream communem, quæ vtrumque quadratum ex illis descriptum metiri possit.

EX CLAVIO.

QVOD si quis roget, cur Euclides definiat seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superque esse explicatas in definitione magnitudinum commensurabilium, cum huiusmodi lineas vna communis mensura metiatur, vt dictum est. At vero quoniam lineas potentia commensurabiles, nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

SCHOLIUM.

HIC aduertendus est Lector, quid per potentiam lineæ sit intelligendum. Potentia enim lineæ cuiusvis, nihil aliud est, quam quadratum ex illa descriptum.

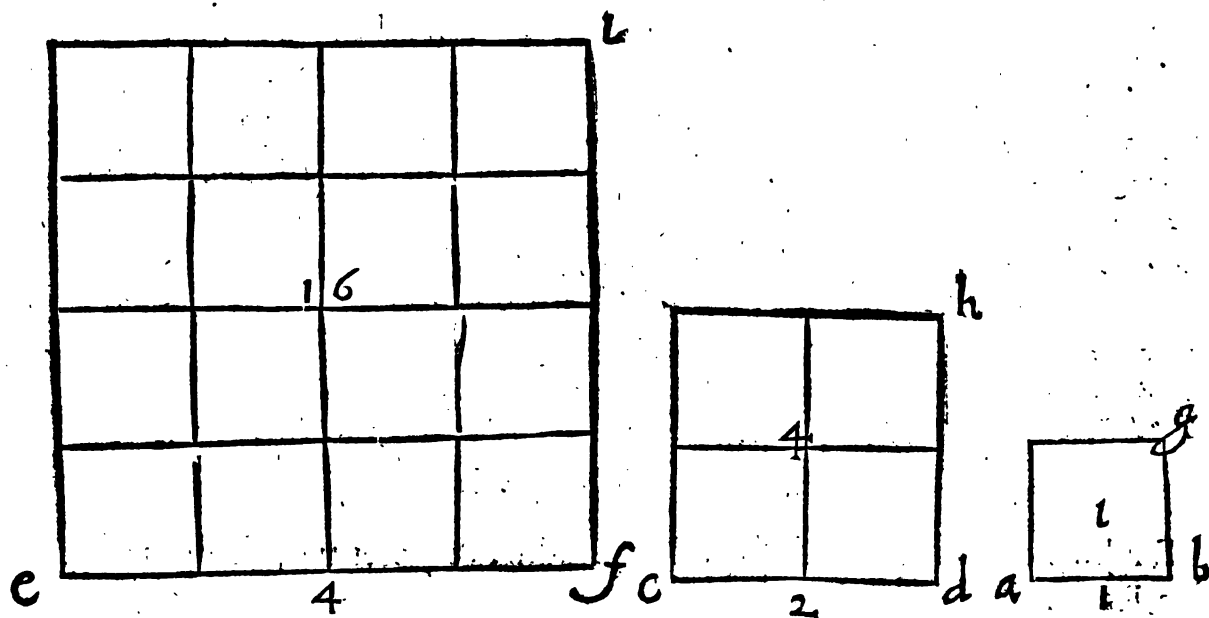
DEFINITIO. IIII.

INCOMMENSURABILES autem cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura contingit reperiri.

OMNES lineæ, quæ nullam admittunt communem mensuram, quarum etiam quadrata nullam aream habent pro communi mensura, recte ab Euclide appellantur potentia incommensurabiles, vt ex antecedenti definitione facile est colligere.

EX CLAVIO.

HABENT autem lineæ commensurabiles idem longitudine, quam potentia hanc quasi conuenientiam inter se, & connectionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nulla lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quarum quadrata commensurabilia quoque sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet.



SICVT enim recta a b, metitur rectas c d, & f. Ita quoque quadratum a g, quadrata c b, & e i, metitur. Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine: multa enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur.

Rursus inter lineas incommensurabiles idem longitudine, quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine. Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum de-

A ij

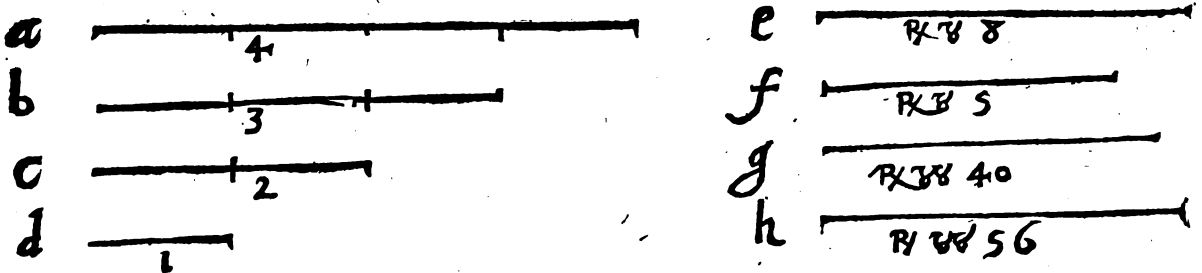
men potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quae quidem omnia perspicua erunt ex coroll. prop. 9. huius libri.

DEFINIT. V.

His positis ostenditur, cuicumque rectae propositae rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia, alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea Rationalis.

OMNI linea proposita, omnes aliae, quae illi comparantur, erunt aut commensurabiles, aut incommensurabiles.

Commensurabiles quidem, si linea illa, quae sunt comparata, linea proposita habent cum proposita aliquam mensuram communem utramque metientem, ut si linea, *a*, sit proposita, illi verò sint comparata *b*, & *c*, manifestum est lineas illas *b*, & *c*, linea *a*, proposita esse commensurabiles, cum inter se linea illa habeant communem mensuram utramque metientem nimirum, *d*.



INCOMMENSURABILES verò si linea, quae comparantur linea proposita, non habent aliquam mensuram communem, ut si linea, *e* & *f*, rationali, *a*, sint comparata, quia inter lineas illas non reperitur mensura communis, idè incommensurabiles erunt longitudine *a*, *e*, & *f*, quamvis potentia sint commensurabiles.

Rursus si linea *g*, & *h*, rationali *a*, sint comparata, erunt *a*, *g*, & *h*, inter se & longitudine, & potentia incommensurabiles.

Longitudine quidem, cum nullam habeant inter se communem mensuram.

Potentia verò, quia earum quadrata nullam habent aream communem, quae possit metiri quadrata ab illis descripta.

EX CLAVIO.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliae commensurabiles sunt, vel incommensurabiles dicitur Graecis *ῥατιοναλὴ* Latini verò Rationalis, quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliae verò cum illa comparata non semper notae sunt, quamvis singulae seorsum sumptae existant certa quoque, ac nota, cum qualibet in quocumque partes aequales possit dividi.

DEFIN. VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

SI linea quaevis rationali proposita, vel longitudine, vel potentia sit commensurabilis, sine dubio linea illa rationalis est.

Hinc colligitur omnem lineam propositam absolute & simpliciter consideratam esse rationalem, cum hac in tot partes aequales dividi queat, quot libuerit: Huic igitur commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, rationales erunt.

EX

ELEMENTVM DECIMVM.

5

EX CLAVIO.

IT AQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis, cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuiuslibet quadrato, ut 16. 100. &c.) quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis.

Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

DEFIN. VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

CVM antea Euclides dixerit, lineas, quæ rationali propositæ sunt commensurabiles, vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, rationales esse: liquidò constat eas, quæ illi utròque modo incommensurabiles existunt, Irrationales esse.

DEFIN. VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

SI ex linea rationali, quadratum descriptum sit, oportet necessario illud rationale esse, Nam quemadmodum linea illa, quæ proponitur semper est notæ magnitudinis (cum ad placitum sumatur & diuidatur.) Sic quadratum ab ea descriptum, semper est certum, ac notum & ideo Rationale.

Aliæ verò superficies, quæ illi comparantur, si fortè cum quadrato illo habent aream quendam pro mensura communi, Commensurabiles appellantur, si non habent Incommensurabiles censeri debent.

DEFIN. IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

SI quadratum propositum Rationale existat, omnia alia quadrata quæ huic commensurabilia sunt, Rationalia erunt. Nam quemadmodum lineæ, quæ rationali propositæ sunt commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, sunt Rationales: Ita superficies & quadrata, quæ superficiei alicui sunt commensurabilia, Rationalia sunt.

Quod verum est non solum, quantum ad quadrata, sed etiam quantum ad ceteras figuras Geometricas, quæ inter se habent aream quendam pro mensura communi.

EX CLAVIO.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

DEFIN. X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

EX CLAVIO.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali lineæ descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

DEFIN. XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa late-

B

ra; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT Euclides lineas, quæ possunt spatia, vel quadrata irrationalia, Irrationales: quemadmodum & quadrata illa Irrationalia dicuntur. Irrationalia autem spatia illa sunt, quando quadrato lineæ Rationalis incommensurabilia sunt, Ita ut si spatia illa sint quadrata, lineæ, à quibus quadrata illa describuntur Irrationales sunt.

Si autem spatia illa non fuerint quadrata, sed alia rectilinea figura, lineæ potentes spatia illa, Irrationales appellantur.

EX CLAVIO.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere ferè semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: Vix autem & rarissimè his: Rationales & Irrationales: Rectè enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum. Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum. Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel potentia tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut variè, & obscurè in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.

Cæterum his definitionibus adjungemus postulatam unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

Postulatum siue Petitio.

EX CLAVIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor verò infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem.

Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 3. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censerì eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, ut alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentie, diuersi esse generis, docuimus.

Axiomata siue Pronunciata.

AXIOMA. I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

AXIOMA. II.

MAGNITVDO quamcumque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

AXIOMA. III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

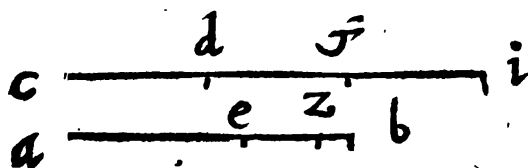
ELEMENTVM DECIMVM.

7

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in ultimis tribus pronuntiatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem magnitudinis.

Theor. i. Propos. i.

DV ABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium, & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.



EXPONANTVR duæ magnitudines a b, & c d, inæquales, quarum a b, maior: c d, verò minor. Dico si ex a b, auferatur maius quàm dimidium nempe a e, & ex reliquo adhuc maius quàm dimidium nempe e z, hocque semper fiat tandem relinqui quandam magnitudinem, quæ minor est quàm c d.

Multiplisetur enim c d, toties donec magnitudo ex ea multiplicatione facta superet magnitudinem a b, sitque magnitudo illa c i, quæ ideo multiplex est ipsius c d, proximè maior quàm a b.

Deinde diuidatur c i, in partes ipsi c d, æquales sintque partes illæ c d, d f, f i, detrahaturque ex a b, maius quàm dimidium a e, Atque ex reliqua e b, adhuc maius quàm dimidium e z, illudque fiat donec partes lineæ a b, partibus c i, multitudine sint æquales.

Quoniam igitur c i, maior est quàm a b, & ex c i, ablata est c d, minor quàm eius dimidium vel certè dimidium si c i, ipsi c d, dupla sit: Ex a b, verò ablata est a e, maior quàm eius dimidium erit reliqua d i, reliqua e b, maior. Nam cum c i, maior sit quàm a b, si ex c i, dimidium esset ablatum, & ex a b, dimidium etiam auferetur, non essent reliquæ æquales, sed vna maior alia existeret, nimirum reliqua ex c i, maior reliqua ex a b.

Auferens igitur ex c i, minus quàm dimidium vel certè dimidium, & ex a b, maius quàm dimidium erit reliquum ex c i, reliquo ex a b, maius.

Deinde quoniam d i, maior est quàm e b, sitque ablata ex d i, dimidium ipsius d f, vel certè minor dimidio ex e b, ablata sit e z, dimidio maior, erit eodem modo reliqua f i, reliqua z b, maior: Sicque procedendo facile est demonstrare ultimam partem ipsius c i, nempe f i, maiorem esse vltima parte ipsius a b, nempe z b.

Est autem f i, vltima pars rectæ c i, æqualis c d, Igitur recta c d, maior est, quàm z b, vltima pars ipsius a b.

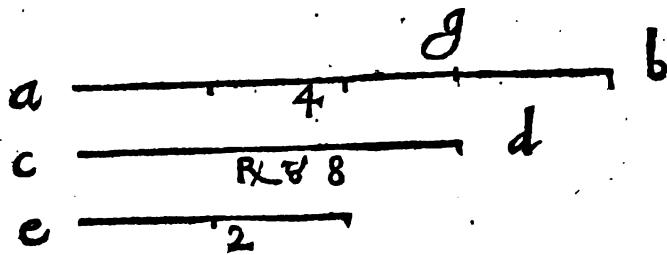
Quare relicta est ea detractioe reliqua z b, quæ minor est quàm c d, quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propof. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Jacobum Peletarium ageremus.

Theor. 2. Propos. 2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore; alterna quadam detractiōe, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



SINT duæ magnitudines inæquales propositæ $a b$, $c d$, minor verò $c d$. Et ex maiore $a b$, minor $c d$, detrahatur, & ex reliqua $g b$, detrahatur adhuc minor $c d$, si fieri potest. quo factò, si nulla mensura communis præcedentem metiens remanet. Dico magnitudines illas esse prorsus incommensurabiles. Nam si sint commensurabiles habebunt magnitudines illæ aliquam mensuram communem, ut vult 1. defin. Sit igitur mensura illa e , vel æqualis, vel minor ipsi $c d$, detracta autem $c d$, ex $a b$, quoties fieri potest relinquitur $g b$, se minor. Ita ut $c d$, rectam $a g$, metiatur.

Deinde detracta $g b$, ex $c d$, relinquat $h d$, se minorem. Ita ut $g b$, rectam $c h$, metiatur: Atque hoc semper fiat alterna quadam detractiōe: Igitur necessario ea detractiōe remanebit quadam magnitudo, minor minore magnitudine proposita, ut constat ex præcedenti propositione, id est ex $c d$, & $a b$, remanebit minor quadam magnitudo quàm e .

Quoniam verò cum $c d$, aufertur ex $a b$, relinquat $g b$, se minorem, erit $a g$, ablata, maior quàm dimidia ipsius $a b$. Nam si esset vel dimidia, vel minor, posset adhuc substrahi ex $a b$.

Pari ratione, erit $c h$, ablata ex $c d$, maior, quàm dimidia ipsius $c d$, Nam si esset, &c.

Auferens igitur semper maius, quàm dimidium, remanebit tandem quadam magnitudo minor quàm e , ut vult antecedens propositio.

Sit igitur recta $h d$, relicta ex detractiōe minor, quàm e .

Quoniam igitur e , metitur $c d$, & $c d$, metitur $a g$, metietur quoque e , rectam $a g$, ut vult 2. pronunciatum lib. huius.

Metitur autem e , totam $a b$, igitur & reliquam $g b$, metietur, ut vult 3. pronunciatum.

At $g b$, metitur $c h$, quare & e , metietur quoque ipsam $c h$, ut vult 2. pronunciatum.

Metitur autem e , totam $c d$, Igitur & reliquam $h d$, metietur, maior minorem. quod est absurdum. Non igitur $a b$, $c d$, aliqua magnitudo metitur, ideo & incommensurabiles.

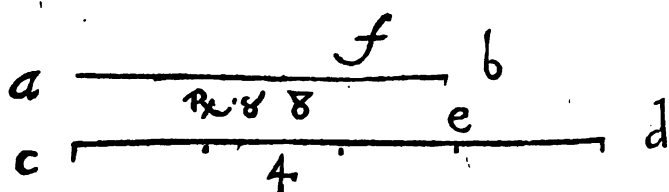
Si igitur duabus, &c. quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

HOC Theorema convertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT



SINT incommensurabiles magnitudines a, b, c, d , detrahaturque minor a, b , ex c, d , & reliqua sit e, d . Item e, d , ex a, b , auferatur, relinquaturque f, b , & sic deinceps. Dico in hac alterna detractiōe nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest metiatur f, b , præcedentem e, d , Quoniam igitur f, b , metitur e, d , & e, d , metitur a, f , ^a metietur quoque f, b , ipsam a, f , metitur autem & seipsam^b. Igitur f, b , & totam a, b , metietur. Metitur autem a, b , ipsam c, e , Igitur & f, b , ipsam c, e , metietur. Ponitur autem & f, b , metiri ipsam e, d , Igitur & f, b , totam c, d , metietur. Oſtensa est autem & f, b , ipsam a, b , metiri. Quare f, b , utramque a, b, c, d , metitur, quod est absurdum, ponuntur enim a, b, c, d , incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

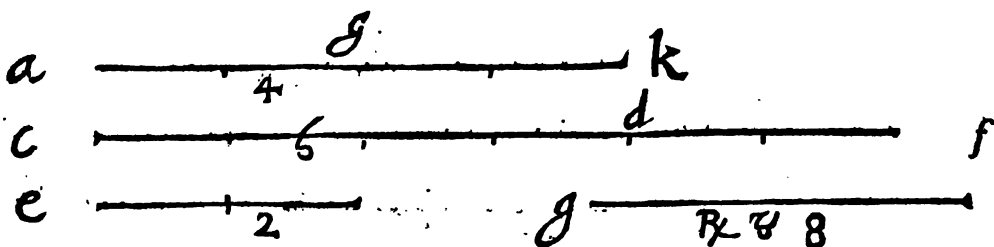
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe. Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, ut demonstravit hoc theoremate Euclides, Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

Itaque facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractiōe, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematu huius scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo f, b , metiri dicebatur præcedentem e, d , ostensum est eandem reliquam f, b , metiri utramque magnitudinem a, b, c, d , Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstravit.

Probl. 1. Propos. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.



SINT duæ magnitudines commensurabiles propositæ a, c , oporteatque inuenire maximam earum communem mensuram, quæ utramque metiatur.

C

Cum igitur magnitudines illae sint commensurabiles ex hypothesi, si à maiori c , minor a , detrahatur, & ex reliqua adhuc minor auferatur, remanebit tandem quadam magnitudo utramque metiens, ut constat ex 2. theoremate Clavij scholij antecedentis, eritque illa g k , vel e .

Nam si nunquam reliqua precedentem posset metiri, incommensurabiles essent magnitudines illae, ut constat ex proposit. 2. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles. Quod autem sit maxima communis mensura ex sequenti demonstratione colliges.

A L I T E R.

REPETIT A priori constructione, auferatur ex maiore c , minor a , sitque c d , & ex a , auferatur d f , quoties fieri potest.

Quoniam enim g k , metitur d f , & d f , metitur a g , metietur quoque g k , ipsam a g , per 2. pronunciatum lib. huius.

Metitur autem g k , seipsam, quare g k , & totam a k , metietur, ut constat ex 1. pronunciatum lib. huius, atque adeo & ipsam c d , quam a k , metitur, ut vult 2. pronunciatum lib. huius. Cum ergo & ipsam d f , metiatur, metietur quoque rectam g k , totam c f , per 1. pronunciatum lib. huius. Metitur quoque g k , utramque a k , c f , quare utriusque a k , c f , communis mensura est g k , vel e , quod idem est.

Quod autem g k , sit maxima earum magnitudinum communis mensura ita probabimus.

Si g k , non est maxima illa communis mensura, oportet necessario ut alia inveniatur, quae sit illarum magnitudinum maxima mensura, cum ex hypothesi ponantur esse commensurabiles.

Sit igitur g . Erit ideo g , maior recta g k . Quoniam igitur g , ponitur metiri utramque magnitudinem a k , c f . Metitur autem a k , ipsam c d , cum a k , c d , sint aequales, metietur quoque g , ipsam c d , per 2. pronunciatum lib. huius.

Metitur autem c f , Igitur g , reliquam quoque d f , metietur, per 3. pronunciatum lib. huius.

Metitur autem d f , ipsam a g . Igitur & g , rectam a g , metietur ex 2. pronunciatum.

Quoniam verò g , totam a k , metitur, metietur quoque g , reliquam g k , maior minorem, quod est absurdum.

Non, igitur maior magnitudo reperitur, quae sit maxima mensura earum magnitudinum, quam g k , vel e .

Quare duabus magnitudinibus, &c. quod erat faciendum.

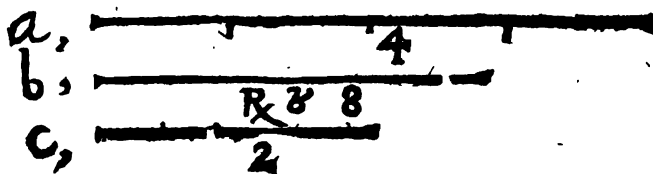
C O R O L L A R I U M E X C L A V I O.

Ex hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

Elicitur hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est g k , esse maximam mensuram communem ipsarum a k , c f . Demonstratum est ibi magnitudinem g , si metiatur magnitudines a k , c f , metiri quoque maximam mensuram g k . Eademque est ratio de ceteris.

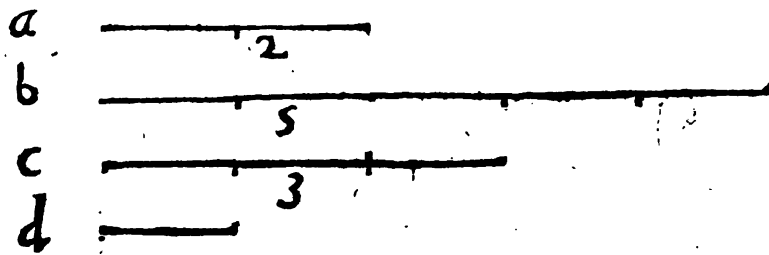
S C H O L I U M E X C L A V I O.

Ex his, quae dicta sunt, non erit difficile considerare, an quolibet magnitudines propositae sint commensurabiles nec ne.

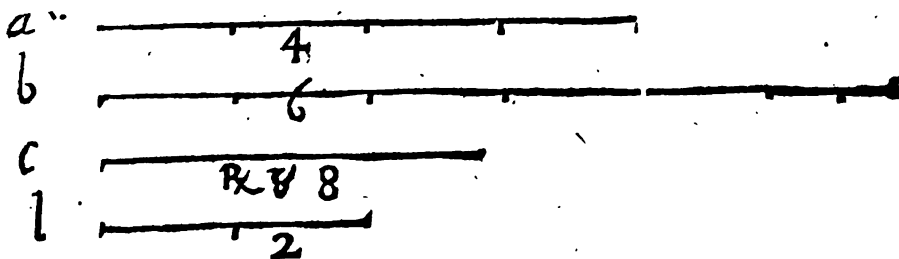


SINT enim tres magnitudines a, b, c , Primum experior per ea, qua ad propof. 2. huius lib. docuimus, an due a , & b , commensurabiles sint, an non. Quae si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres a, b, c , esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines a , & b .

Si vero a , & b , fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta d , quae si metiatur quoque magnitudinem c , manifestum est, tres magnitudines a, b, c , commensurabiles esse cum habeant communem mensuram d .

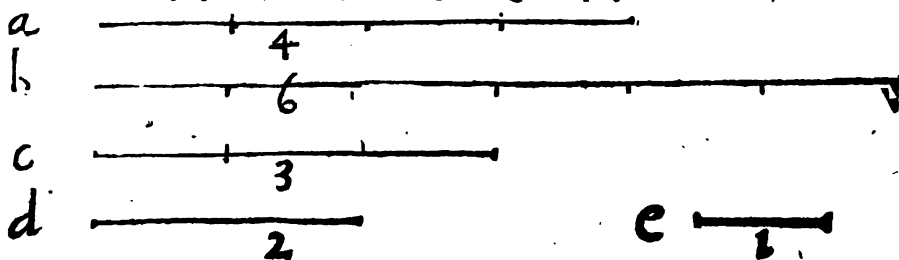


QVOD si d , maxima mensura magnitudinum a , & b , non metiatur c , erunt c , & d , vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres a, b, c , incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles metietur earum maxima communis mensura ipsam d , maximam mensuram magnitudinum a , & b , per coroll. huius propof.



CVM ergo eadem illa mensura metiatur quoque c , non erunt c , & d , incommensurabiles. Quod est contra hypotesin.

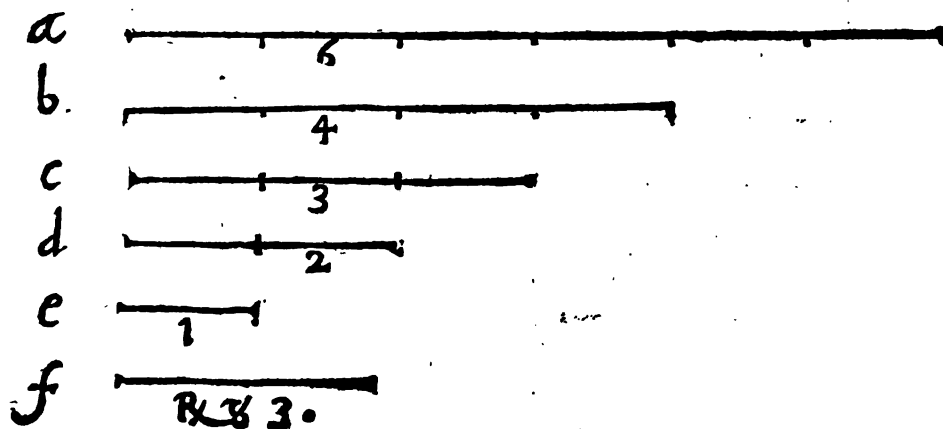
SI vero c , & d , sunt commensurabiles, erunt quoque tres a, b, c , commensurabiles. Inuenta enim e , maxima mensura ipsarum c , & d , cum e , metiatur d , & d , ipsas a , & b , metietur quoque e , ipsas a , & b . Quare cum eadem e , metiatur quoque c , metietur c , tres magnitudines a, b, c , Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.



SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor experiemur id primum in tribus, si quinque, in quatuor, & c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

Probl. 2. Propof. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.



SINT tres magnitudines propositæ commensurabiles a, b, c , oporteatque maximam harum inuenire communem mensuram, Sitque d , maxima earum a , & b , mensura communis inuenta. Igitur si d , tertiam c , metitur, factum est, quod petitur, ac proinde d , erit harum trium a, b, c , maxima mensura communis.

Si enim aliqua magnitudo maior, quàm d , inueniatur, quæ metiri possit magnitudines a, b, c , metietur eadem per corollarium Clauij propof. 3. lib. huius maximam mensuram ipsarum; nimirum ipsam d , maior minorem; quod est impossibile.

Si verò d , non metiatur c , erunt nihilominus d & c , inter se commensurabiles.

Cùm autem a, b, c , sint commensurabiles, metietur mensura qualibet earum communis ipsam d , maximam mensuram ipsarum a, b , per coroll. præcedentis propositionis.

Quare cùm eadem illa mensura metiatur quoque ipsam c , erunt d , & c , commensurabiles.

Sit ergo e , maxima mensura earum: Dico e , maximam esse mensuram communem harum a, b, c , Quod verum esse sic probabimus.

Quoniam e , metitur d , & c , & d , metitur a , & b , metietur quoque e , ipsas a , & b , metietur autem & ipsam c . Igitur e , maxima mensura est communis ipsarum a, b, c , quemadmodum diximus.

Si enim e , non est maxima communis mensura, Reperiatur alia communis mensura, Sitque illa f , si fieri potest: Quoniam igitur f , metitur a , & b , metietur quoque & earum maximam mensuram communem d , per coroll. Clauij antecedentis propositionis, metietur autem & c . Igitur f , metiens d , & c , metietur quoque & earum maximam mensuram communem e , ex corollario eodem, Maior minorem, quod absurdum.

Non igitur maior magnitudo, quàm e , magnitudines propositas a, b, c , metietur, Ac propterea e , maxima est earum mensura communis.

Quare tribus magnitudinibus, & c , quod erat faciendum.

COROLLARIUM EX CLAVIO.

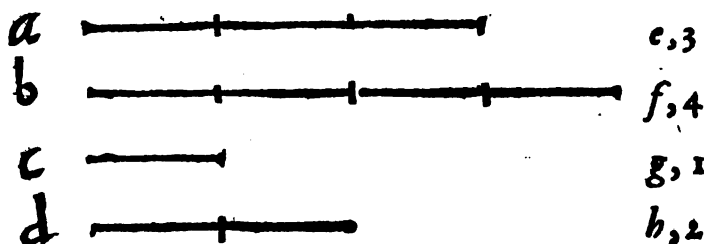
APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

Infertur autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem f , si metiatur ipsas a, b, c , metiri quoque e , maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio. Simili modo pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus, locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum. Si quinque accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA EX CLAVIO.

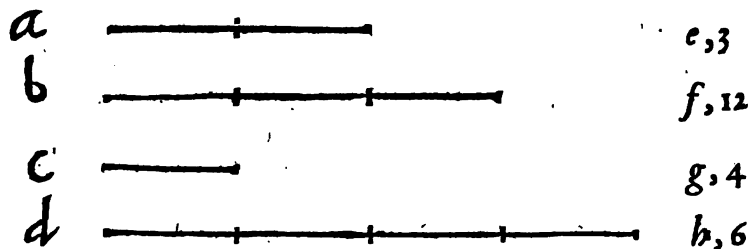
Si sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines a, b, c, d , in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri e, f, g, h , vt quidem a , ad b , ita e , ad f , & vt b , ad c , ita f , ad g , & vt c , ad d , ita g , ad h .



DICO ex aquo esse, ut a , ad d , ita e , ad h , Quoniam enim ex iis, quæ ad defn. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio a , ad d , componitur ex proportionibus a , ad b , b , ad c , & c , ad d , quàm proportio e , ad h , ex proportionibus e , ad f , f , ad g , & g ad h , perspicuum est, cum proportionibus componentes proportionem a , ad d , æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem e , ad h , componunt, & compositas proportionibus, nempe a , ad d , & e , ad h , æquales esse, hoc est, esse ut a , ad d , ita e , ad h , quod est propositum.

Idem sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata,



Ut in hoc exemplo apparet, in quo est, ut a , ad b , ita g , ad h , & ut b , ad c , ita f , ad g , & ut c , ad d , ita e ad f . Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

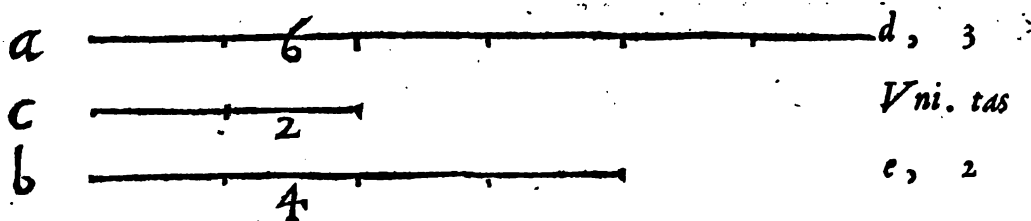
QUONIAM præcedenti lemmate, & in propositione, quæ sequitur, & in aliis multis, utendum nobis erit, placuit illud hoc loco breviter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo, & numerus diversa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatis eiusdem generis: In numeris quidem lib. 7. libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto libro facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conveniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines a, b, c, d , quæ proportionibus habent easdem, quas numeri e, f, g, h , rationem induant numerorum.

Theor. 3. Propos. 5.

COMMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quàm numerus ad numerum.

SINT propositæ magnitudines commensurabiles a , & b , Dico eas habere adinuicem rationem eandem, quam aliquis numerus habet ad alium numerum.

Reperiatur earum maxima mensura communis per ea, quæ docuimus ad propos. 3. lib. huius, Sitque c , & quoties c , metitur a , toties vnitas numerum d , metiatur, & quoties eadem c , magnitudinem b , metitur, toties vnitas numerum e , metiatur.



IGITUR quia magnitudo c , magnitudinem a , & vnitas numerum d , æquè metitur, Æqualiter magnitudo a , magnitudinem c , atque numerus d , vnitatem continebit.

Quocirca erit ut a , ad c , ita numerus d , ad vnitatem: Est autem ut c , ad b , ita vnitas ad numerum e , quod c , ipsam b , atque vnitas numerum e , æquè metiatur.

Igitur ex lemmate Clauij antecedentis propos. erit ex aquo, ut a , magnitudo, ad b , magnitudinem, Ita numerus d , ad numerum e .

Igitur commensurabiles magnitudines rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

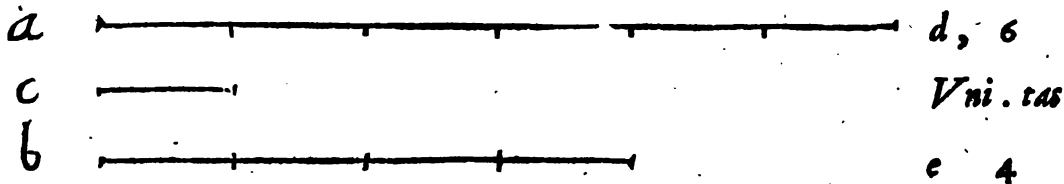
D

CUM Euclides ad demonstrationem huius theorematiss assumat, maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit ipsarum a , & b , perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Haec enim sola communem recipiunt mensuram, neque adeo in eis demonstratio locum habet. Quod si lineae sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsaeque demonstratio huius theorematiss conuenit. At ipse lineae nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sint, communis mensurae sunt expertes, ac propterea huius theorematiss demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porro eiusdem huius theorematiss liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines a , & b , quam habent numeri d , & e , per quos scilicet earum mensura communis maxima ipsas metitur.

Vnde si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus a , & b , liceat inuenire, quam proportionem habeant in numeris: sumenda erunt duo numeri d , & e , quos vnitas aequae, ac communis magnitudinum commensurabilium a , & b , mensura maxima ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines a , & b , proportionem habent, quam numeri d , & e .

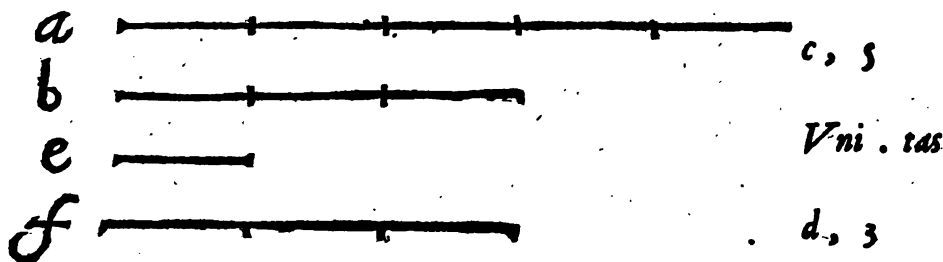
Quod si loco maxime mensurae c , sumamus aliam quamcunque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento.



QUAMVIS enim numeri d , & e , maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori: habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposita figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inuenti sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium, propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

Theor. 4. Propos. 6.

SI duae magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.



HABEANT duae magnitudines a , & b , rationem numerorum c , d , Dico magnitudines a , b , inter se commensurabiles esse.

Quoties enim numerus c , ab vnitate metitur, in tot partes aequales diuidatur magnitudo a , vnique earum partium aequalis sit magnitudo e , & quoties eadem vnitas numerum d , metitur, toties magnitudo e , metiatur magnitudinem f .

Igitur cum magnitudo e , aequae in magnitudine a , contineatur, quoties vnitas in numero c , continetur, continebit aequaliter magnitudo a , magnitudinem e , toties quoties à numero c , vnitas continetur.

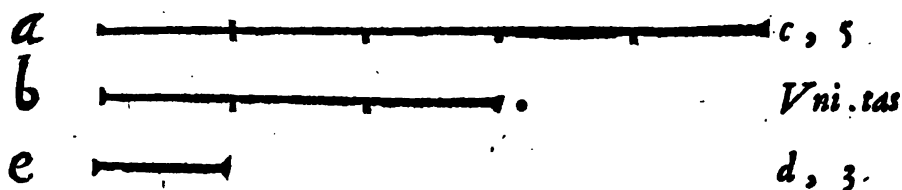
Erit igitur magnitudo a , ad magnitudinem e , ut numerus c , ad vnitatem: est autem ut e , ad f , ita vnitas ad d , quod magnitudo e , aequae metiatur magnitudinem f , ut vnitas numerum d , Quare ex lemmate Clauij propof. 4. lib. huius, erit ex aequalitate, ut magnitudo a , ad magnitudinem

f, ita numerus c, ad numerum d, Erat autem etiam vt numerus c, ad numerum d, ita magnitudo a, ad magnitudinem b, ita eadem a, ad magnitudinem f, igitur magnitudines b, & f, æquales sunt vt vult 9. propof. lib. quinti.

Cum autem magnitudo f, à magnitudine e, metiatur, metietur quoque magnitudo b, à magnitudine e, Metiebatur autem e, magnitudinem a.

Quare cum magnitudines a, & b, à magnitudine e, metiantur, erunt magnitudines a, & b, inter fe commensurabiles.

Si duæ magnitudines igitur, &c. Quod erat ostendendum.



ALITER.

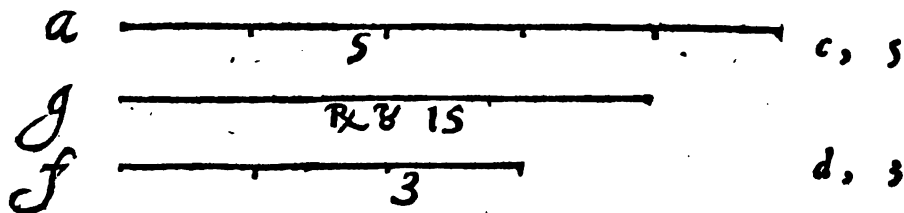
SIT magnitudo a, diuisa in tot partes æquales, quot vnitates sunt contentæ in numero c, quarum partium vni sit æqualis e, Sitque etiam magnitudo b, diuisa in tot partes æquales, quot sunt vnitates in numero d, Quoniam igitur est vt magnitudo e, ad magnitudinem a, ita vnitas ad numerum c, nam ex hypothesi æquæ magnitudo e, magnitudinem a, metitur, sicut vnitas numerum c, Atque ex constructione ponitur esse vt a, ad b, ita c, ad d, igitur per lemma Clauij propof. 4. erit ex æquo, vt e, ad b, ita vnitas ad d, Metitur autem vnitas numerum d, igitur & magnitudo e, magnitudinem b, metitur. Metitur autem e, ipsam quoque a, igitur a, & b, habent eandem communem mensuram e, ac propterea commensurabiles per 1. defin. lib. huius.

Quare si duæ magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

Ex priori autem demonstratione theorematibus aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data a, vt numerus c, ad numerum d, diuidenda erit linea a, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in c, & sumenda alia linea f, tot earumdem partium, quot vnitates sunt in d, Hoc enim si fiat, erit a, ad f, vt c, ad d, vt demonstratum est.

Hinc rursus apparet, quānam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ a, vt numerus c, ad numerum d.



INVENIENDA erit primum linea f, ex iis, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat a, vt c, ad d, Deinde accipienda inter a, & f, media proportionalis g. Erit enim quadratum ex a, ad quadratum ex g, vt c, ad numerum ad numerum d. Cum enim tres rectæ a, g, f, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propof. 10. lib. 6. vt a, ad f, atque adeo vt numerus c, ad numerum d, cum sit vt a, ad f, ita c, ad d, Sic quadratum ex a, ad quadratum ex g, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

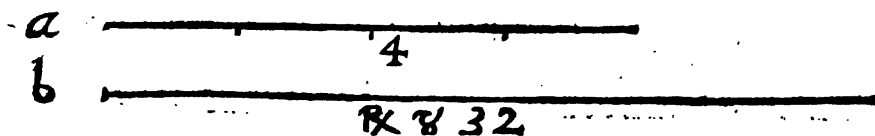
SCHOLIUM EX CLAVIO.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse

longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines a , & b , mensuram communem c , habere demonstratum est.

Theor. 5. Propos. 7.

INCOMMENSURABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.



SINT proposita magnitudines incommensurabiles a , & b , Dico eas non habere rationem numeri ad numerum. Nam si haberent rationem numerorum, inter se essent commensurabiles, contra hypothesin. ponuntur enim incommensurabiles.

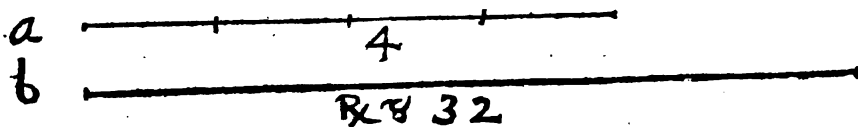
Quare a , & b , quæ magnitudines sunt incommensurabiles, non habent inter se rationem, quam numerus ad numerum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOCUNQUE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligamus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ut vult theorema. Nam aliàs ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

Theor. 6. Propos. 8

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.



NON habeant magnitudines a , & b , rationem inter se numeri ad numerum. Dico eas esse incommensurabiles. Nam si essent commensurabiles, haberent rationem numerorum. Quod est contra hypothesin ponuntur enim non habere.

Quare si duæ magnitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

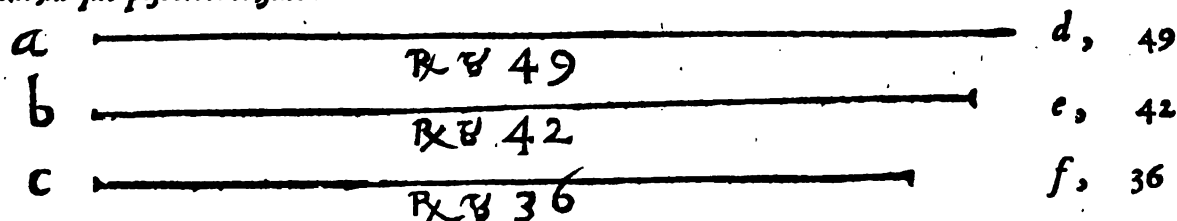
QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum erunt ipsa necessarid, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles: alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, ut ad propos. 5. huius lib. demonstravimus. quod est contra hypothesin. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessarid potentia incommensurabiles esse, ut manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematiss assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, ut in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematiss demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT

SINT continuè proportionales tam quantitates a, b, c, quàm d, e, f, siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non:

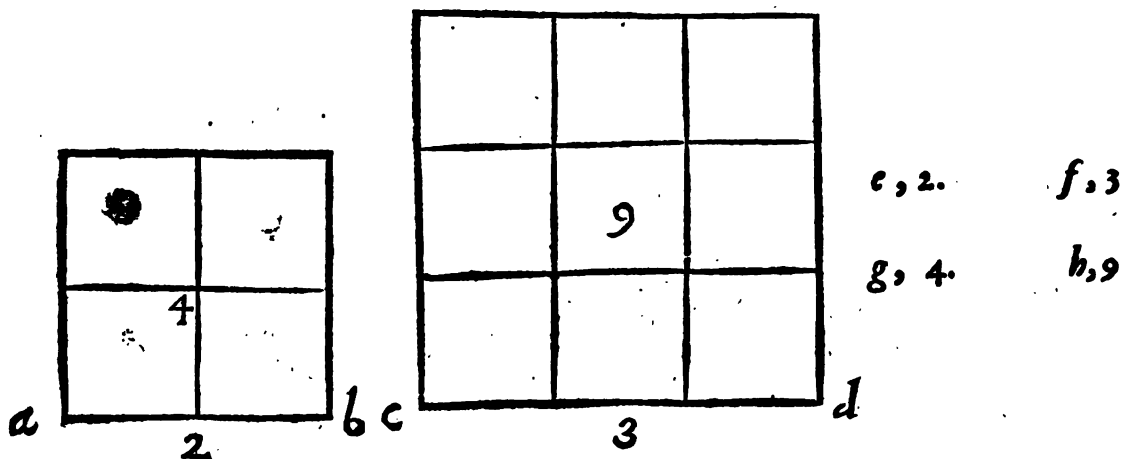


Sitque ut a, ad c, ita d, ad f. Dico quoque esse ut a, ad b, ita d, ad e, Quoniam enim tam proportio a, ad c, proportionis a, ad b, quàm proportio d, ad f, proportionis d, ad e, duplicata est, ponunturque proportionibus a, ad c, & d, ad f, æquales: erunt quoque proportionibus a, ad b, & d, ad e, æquales; quandoquidem eorum proportionibus duplicata, æquales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicata, ad demonstrationem: & in quinque quadruplicatam, &c.

Theor. 7. Propos. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.



SINT rectæ a b, & c d, longitudine commensurabiles. Dico quadrata ab illis descripta, inter se rationem habere numeri quadrati ad numerum quadratum. Nam cum rectæ a b, & c d, sint commensurabiles longitudine, habebunt inter se rationem, quam numerus ad numerum, ut vult 5. propos. lib. huius. Sitque ea ratio, quæ numeri e, ad numerum f, quadrati etiam ipsorum sint g, & h.

Igitur quia est a b, ad c d, ut e, numerus ad numerum f, habet autem quadratum ex a b, ad quadratum ex c d, duplicatam proportionem lateris a b, ad latus c d, ut constat ex 20. sexti.

Numerusque quadratus g, habet ad numerum quadratum h, duplicatam etiam proportionem lateris e, ad latus f, Erit eadem proportio quadrati ex a b, ad quadratum ex c d, quæ numeri quadrati g, ad quadratum numerum h, quia amba hæ proportionibus sunt duplicata propor-

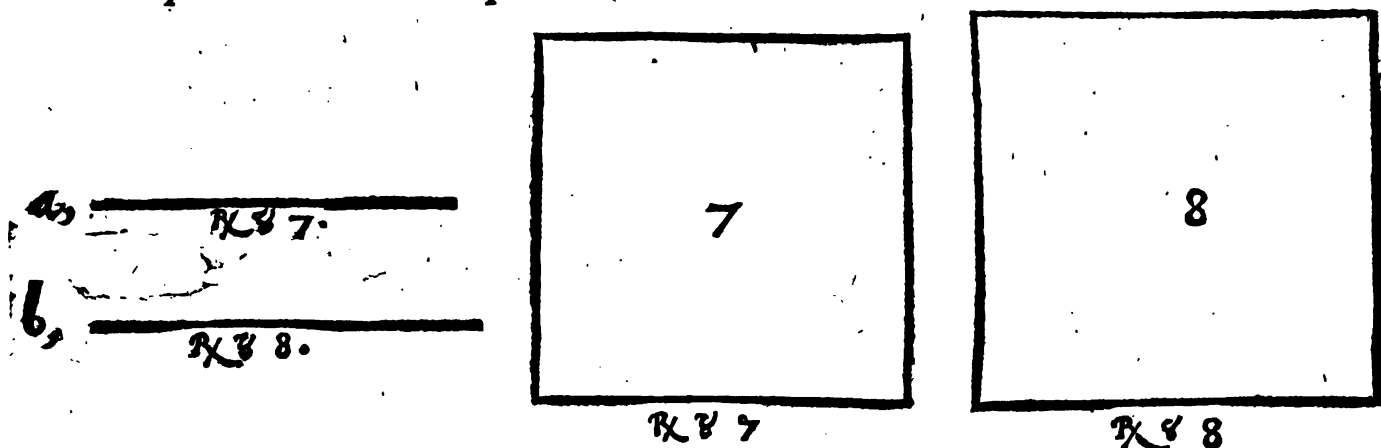
E

tionum aequalium. Quod primum erat ostendendum.

Rursus sit quadratum ex a , b , ad quadratum ex c , d , ut numerus quadratus g , ad quadratum numerum h , Dico rectas a , b , & c , d , esse longitudine commensurabiles, Sunt enim numeri e , & f , latera numerorum quadratorum g , & h , Quoniam igitur quadratum a , b , ad quadratum ex c , d , est ut numerus quadratus g , ad quadratum numerum h . Habet autem quadratum ex a , b , ad quadratum ex c , d , duplicatam proportionem lateris a , b , ad latus c , d , Numerusque quadratus g , eandem duplicatam proportionem habet ad quadratum numerum h , lateris e , ad latus f , Eadem erit proportio lateris quadrati a , b , ad latus quadrati c , d , qua lateris numeri e , ad latus numeri f , Harum enim proportionum proportionum duplicatae, aequales sunt.

Igitur cum rectae a , b , c , d , inter se proportionem habeant, quam numeri e , & f , ipsae erunt longitudine commensurabiles. Quod iterum erat ostendendum.

Deinde sint rectae a , b , incommensurabiles longitudine. Dico earum quadrata non habere inter se rationem numeri quadrati, ad numerum quadratum. Nam si haberent rationem numerorum quadratorum, essent longitudine commensurabiles, quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Quare quadrata ex a , & b , descripta non habent rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.



POSTREMO non habeat quadratum ex a , ad quadratum ex b , eandem rationem, quam numerus quadratus, ad numerum quadratum. Dico eas esse longitudine incommensurabiles. Si enim commensurabiles essent longitudine, haberent earum quadrata rationem numerorum quadratorum, quod est contra hypothesin, ponuntur enim non habere. Igitur a , & b , minimè sunt longitudine commensurabiles.

Quocirca quae à rectis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM EX CLAVIO.

Ex his manifestum est, rectas lineas quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse. Quae verò potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quae longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles. Quae verò potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est simpliciter quam numerus ad numerum: ipsa commensurabilia erunt, Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existunt: Quare linearum longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

Deinde quia linearum, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint: At longitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est

^a 6. dec.

^b 3. defin.

^c 3. defin.

^d 6. decimi.

ostensum; perspicuum est, lineas, potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ex lineis potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematism.

Rursus quia lineas, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse, solum enim ex lineis longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint. 4. defin.
8. decimi.

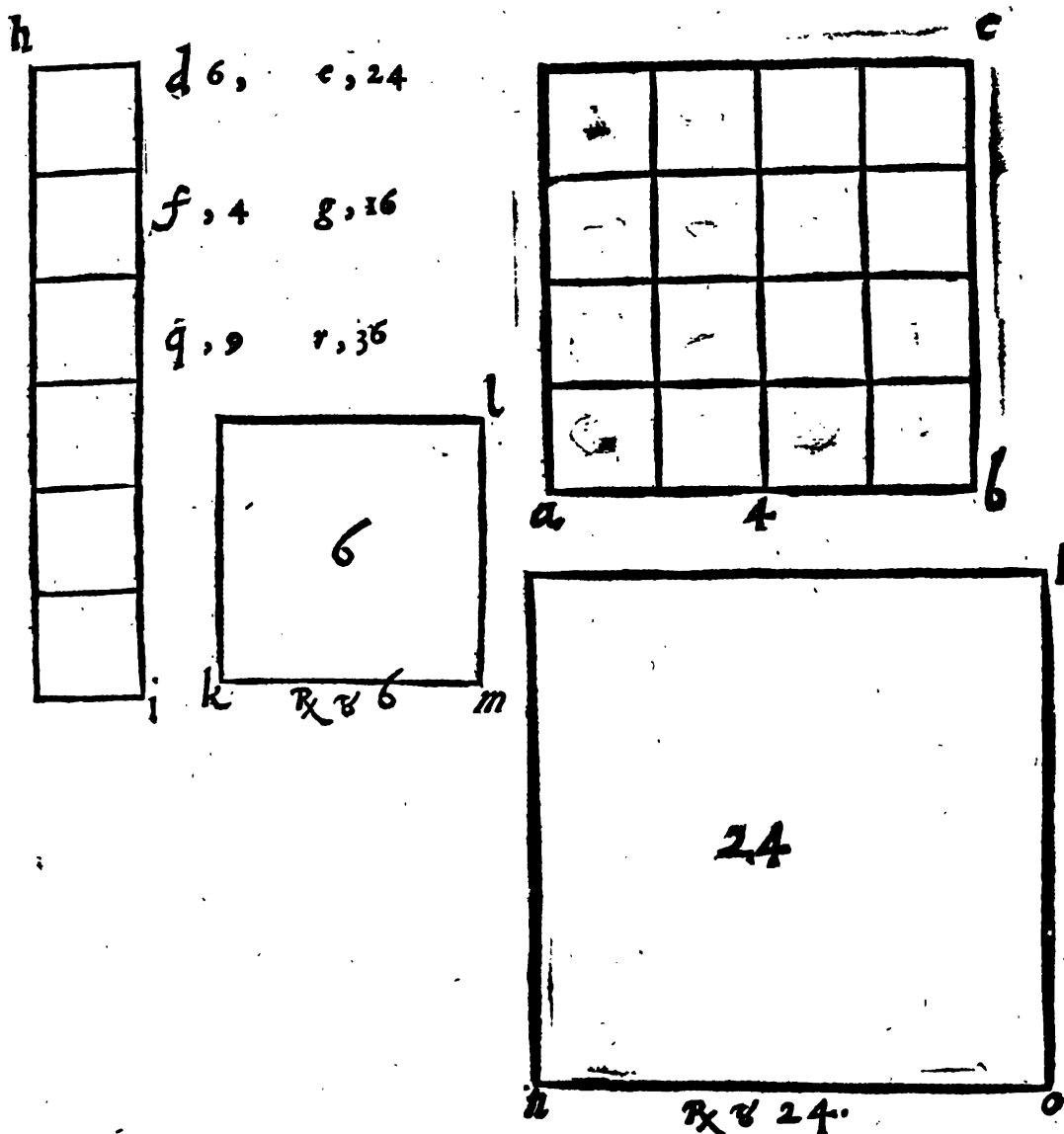
Postremo lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quamobrem lineas potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematism planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideranda sunt hac, quae sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematism proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quae numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illae, quae in demonstratione sunt posita; (est enim recta a b, 2. & c d, 3.) Verum etiam illas, quae nullis possunt numeris expressi, si cum Rationali linea proposita conferantur. Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineas, seu latera ex secunda theorematism parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quae continent totidem quadratas mensuras aequales illis, in quibus quadratum Rationalis linea resoluitur, quot sunt unitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex a b, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex c d, novem; quot nimirum unitates sunt in quadratis numeris g, h.) Sed etiam, quae vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato linea Rationalis conferantur. Saepe enim linea data commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationalis linea proposita sunt longitudine incommensurabiles. Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate est ostensum, ac pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris unitates. Hac autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

Exponatur linea Rationalis a b, expressa numero 4, cuius quadratum a c, continebit mensuras quadratas 16. Sine quoque numeri d, e, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, ut in Arithmetice est demonstratum, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, nempe 4, ad 16. Deinde sumatur rectangulum h i, constans ex sex quadratis mensuris quadratis a c, quot nimirum unitates in d, numero continentur, atque ipsi h i, quadratum aequale constituantur k l, cuius latus k m, Postremo per ea, quae in coroll. propos. 6. huius libri ostendimus, inveniatur recta n o, ad cuius quadratum n p, ita se habeat k l, quadratum rectae k m, ut numerus d, ad numerum e, vel ut quadratus f, ad quadratum g. Quoniam igitur est ut quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, vel ut numerus d, ad numerum e, videlicet 6, ad 24, ita quadratum k l, ad quadratum n p, per constructionem, continet autem quadratum k l, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationalis a c; (constitutum enim est quadratum k l, aequale rectangulo h i, constans ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum n p, eandem mensuram quadratarum 24, ac propterea k m, n o, latera quadratorum k l, n p, erunt 6. & 24. quae numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque linea Rationali a b, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata k l, n p, proportionem habeant ex corollario propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum k m, n o, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1, ad 4, erit proportio laterum subdupla videlicet 1, ad 2. Huius enim illa duplicata est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commensurabiles sunt rectae k m, n o, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineae etiam illae, longitudine commensurabiles, quae numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eadem lineae k m, n o, simpliciter, & absolute, nulla habita ratione linea Rationalis a b, numeris poterunt expressi. Cum enim proportionem habeant subduplam, si k m, dividatur in duas partes aequales, dividetur n o, in eiusdem magnitudinis partes 4, si illa in 3. secabitur hac in 6. & c. At verò haec partes nullo modo aequales sunt partibus lineae Rationalis a b, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, ut diximus. 16. octavi.
14. secundi.
6. decimi.

Rursus quia quadrata k l, n p, proportionem habentia, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, plures quadratas mensuras continent aequales illis, in quas a c, quadratum Rationalis linea a b, resoluitur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis f, g. (Nam k l, aequale est sex huiusmodi mensuris, & n p, continet 24. At numerus quadratus f, componitur ex quatuor unitatibus, & g, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportionem sumantur q r, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata k l, n p, quam sunt unitates in numeris quadratis q r, cum alter ex 9, alter verò ex 36. unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, quae pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam unitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato linea Rationalis proposita. Quod si eadem quadrata k l, n p, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati a c, ex Rationali linea a b, descripti, resolvi poterunt in totidem mensuras quadra-



tas, quot unitates in quadratis numeris f, g , vel q, r , continentur. Nam si recta k, m , dividatur in duas partes, & n, o , in quatuor, ut dictum est, continebit quadratum k, l , quatuor mensuras quadratas, & quadratum n, p , sexdecim quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris f, g . Item si eadem linea secetur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9, & 36, quot nimirum unitates comprehenduntur in numeris quadratis q, r , & c. At huiusmodi mensura nullo modo aequales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum a, c , Rationalis linea a, b , resoluitur.

Idem dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3, habentes proportionem, quam quadratus numerus 16, ad quadratum numerum 4, & c.

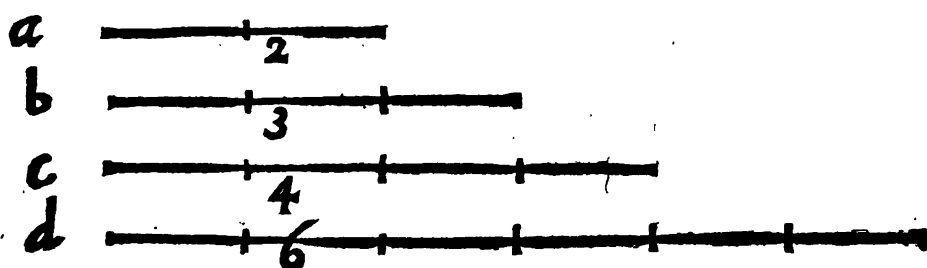
Itaque theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationali linea incommensurabiles sint, ut sit sensus: Quadrata, quae describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineae Rationali propositae, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineae conferantur, septemnumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hac quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineae, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia etiam si lineae Rationali sint longitudine incommensurabilia, & c.

Colligit Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propof. 47. lib. I. demonstravimus. Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quae quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, ut in scholio propof. 8. lib. 8. ostendimus, Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematum, eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propof. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendit Euclides propof. ultima huius libri.

Theor.

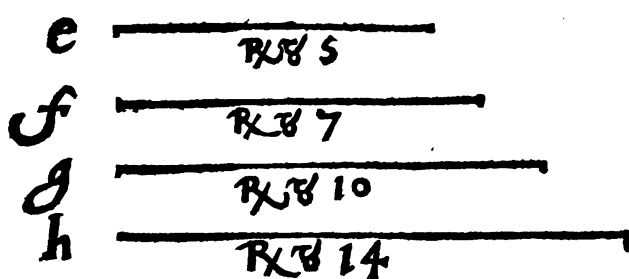
Theor. 8. Propos. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.



SINT quatuor magnitudines proportionales a, b, c, d . Sitque prima a , secunda b , commensurabilis. Dico & tertiam c , quartæ d , esse commensurabilem. Quoniam enim a , & b , inter se sunt commensurabiles, habebunt earum quadrata rationem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, ut constat ex prima parte propof. antecedentis, nimirum ut 4, ad 9. Igitur & quadrata ex c , & d , habebunt etiam rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum, ponitur enim esse, ut a , ad b , ita c , ad d , Quare & c, d , sunt longitudine commensurabiles.

Rursus sint alie quatuor magnitudines inter se proportionales sitque prima e , ad secundam f , incommensurabilis.



DICO & tertiam g , quartæ h , esse incommensurabilem. Cum enim e , & f , sint incommensurabiles, non habebunt earum quadrata rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex tertia parte theorematum antecedentis. ponitur autem esse, ut e , ad f sic g , ad h , Igitur quadrata ex g , & h descripta rationem quadratorum numerorum non habebunt. Quare g , & h , sunt longitudine incommensurabiles. Si igitur quatuor, & c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, ut ex demonstratione huius theorematum apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare ut in scholio propof. 5. huius lib. diximus longitudine commensurabiles sunt. Si autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia tantum erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repeatur enim eadem figura. Quoniam igitur a , commensurabilis est potentia ipsi b , erunt earum quadrata commensurabilia, ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Est autem ut quadratum ex a , ad quadratum ex b , ita quadratum ex c , ad quadratum ex d , (quod quatuor lineæ propositæ a, b, c, d , proportionales sint, & earum quadrata figurae similes similiterque descriptæ.) Igitur & quadrata ex c, d , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt, ac propterea lineæ c, d , potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita

3. def.

5. decimi.

10. sexti.

6. decimi.

3. defin.

F

manifestum fiet. Quoniam recta a , cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut in scholio propof. 7. huius libri docuimus. Ac propterea neque c , d , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt c , d , ex scholio propof. 8. huius libri. Sunt autem potentia commensurabiles, ut ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

Eadem ratione si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommensurabilis. Nam si a , & b , sint longitudine tantum incommensurabiles, erunt ipsarum potentia commensurabiles, ac propterea ipsae potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur ut nunc ostendimus, erunt quoque recta c , d , potentia tantum commensurabiles; ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

8. decimi.

Rursus si quatuor magnitudinum priores duae fuerint linea, duae vero reliquae superficies, vel solida: Sequetur nihilominus si linea sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim linea sint longitudine commensurabiles, erit earum proportio, quae numeri ad numerum ex eis, quae in scholio propof. 5. huius libri docuimus. Cum ergo habeant reliquae duae magnitudines proportionem eandem, quam linea, erit quoque illarum proportio, quae numeri ad numerum, atque adeo commensurabiles erunt. Si vero linea longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non, non erit earum proportio, quae numeri ad numerum, ut constat ex scholio propof. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium proportio erit, quae numeri ad numerum. Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

5. decimi.

Eodem modo si priores duae magnitudines, fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duae linea, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & linea eandem cum illis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum, ac propterea longitudine commensurabiles erunt, ut diximus in scholio propof. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque linea eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quae docuimus, in scholio propof. 8. huius lib. Quod est propositum.

LEMMA EX CLAVIO.

Dv o s numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quae ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum ut in scholio propof. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

Quod si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quocunque numeros primos, per ea, quae in scholio propof. 20. lib. 9. tradidimus, a , b , c , d , e .

a , 3. b , 5. c , 7. d , 11. e , 13.

NVLLI enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propof. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, ut ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est federicus Commandinus. Quod ut ostendamus adducenda est eorum ratio, quae dictos numeros inuenire conantur, ita igitur rem expediunt.

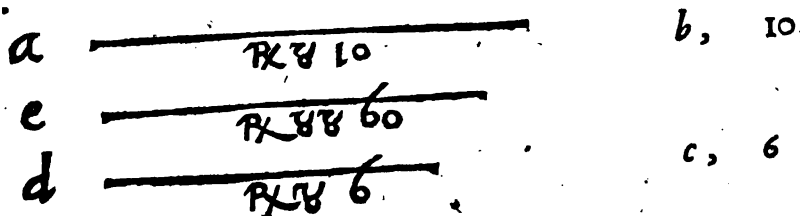
Exponentur quatuor numeri a , b , c , d , ita ut non sit sicut a , ad c , ita b , ad d , Et fiat ex a , b , numerus e , Et ex c , d , numerus f , Perpicuum igitur est e , f , numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

a , 2.	c , 3.
b , 6.	d , 16.
e , 12.	f , 48.

Hac est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia septemmero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12, & 48, sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4, proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. ut constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6, non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera minus proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quaecunque duo latera minus proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius, quae de re plana scripsimus in definit. 21. lib. 7. & in scholio propof. 23. lib. 8.

Probl. 3. Propos. II.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram verò etiam potentia.



SIT recta linea proposita a , cui sit inuenienda alia linea ei incommensurabilis longitudine tantum. Quod ut adimpleatur, reperiantur primò duo numeri b , & c , non habentes inter se proportionem numerorum quadratorum, illudque per ea, quæ Clavius docuit lemmate antecedentis propositionis. Deinde ex corollario Clauij propos. 6. huius lib. inueniatur linea d , ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex a , ut numerus b , ad numerum c , id est ut 10. ad 6. Dico rectam d , esse ipsi a , tantum longitudine incommensurabilem. Quod sic probo. Quadratum ex a , ad quadratum ex d , sic se habet ut numerus b , ad numerum c , id est ut, 10. ad 6. proportio autem 10. ad 6. non est eadem, quæ numeri quadrati ad quadratum numerum. Igitur nec quadratum ex a , ad quadratum ex d , rationem habet numerorum quadratorum. Atque adeò rectæ a , & d , longitudine incommensurabiles per 9. propos. lib. huius. Quod autem longitudine tantum sint incommensurabiles sic ostenditur: Quoniam quadrata ex a , & d , rationem habent numerorum 10, & 6, ut iam fuit demonstratum, erunt rectæ a , & d , potentia commensurabiles, ut patet ex 6. defin. lib. huius: longitudine igitur tantum sunt incommensurabiles a , & d , quod est primum.

Rursus inuenienda sit alia, recta proposita a , longitudine, & potentia incommensurabilis. Sumatur media proportionalis e , inter rectas a , & d , Dico rectam e , ipsi a , esse vtroque modo incommensurabilem. Nam quadratum ex a , ad quadratum ex e , sic se habet ut recta a , ad rectam d , longitudine autem sunt incommensurabiles a , & d , ostensa: Quare quadratum ex a , quadrato ex e , incommensurabile erit per 10. defin. lib. huius.

Quocirca rectæ a , & e , potentia sunt incommensurabiles, Ac proinde ex coroll. Clauij propos. 9. lib. huius omninò & longitudine. Recta igitur e , rectæ a , propositæ, & potentia, & longitudine incommensurabilis existit.

Proposita igitur rectæ, & c . Quod erat faciendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

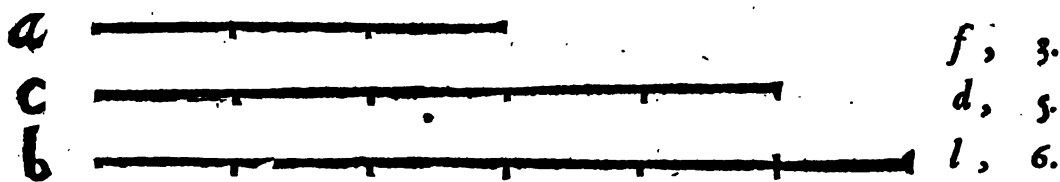
SI igitur recta a , proposita statuatur Rationalis, ita ut ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta d , per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero e , Irrationalis ex defin. 7. cum Rationalis a , incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

Cæterum ex demonstratione huius theorematu liquidò constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeò appellari irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ a , & d , sint longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam e , inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodémque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi d , esse incommensurabilem. Cum enim rectæ d , & e , sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex d , ad quadratum ex e , ita recta d , ad rectam a . Est autem recta d , rectæ a , incommensurabilis longitudine. Igitur & quadratum ex d , quadrato ex e , incommensurabile erit. Quare rectæ d , & e , ex defin. incommensurabiles sunt 10. decimi. potentia, atque adeò & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

In codicibus vulgatis preponitur hæc undecima propositio à Theone propositioni decima præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione, decima demonstraretur. ut ex dictis apparet.

Theor. 9. Propos. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.



SINT magnitudines a , & b , magnitudini c , cõmensurabiles: Dico eas esse inter se commensurabiles: Nam cum a , & c , sint ex hypothesi commensurabiles, habebit a , ad c , proportionem, quam numerus aliquis, habet ad alium numerum: Sit proportio a , ad c , numeri f , ad numerum d , id est 3, ad 5.

Rursus cum b , ad c , sint etiam commensurabiles posita, habebit b , ad c , rationem quam numerus ad numerum ex 5. propos. lib. huius. Sit igitur proportio b , ad c , numeri l , ad d , id est 6, ad 5.

Igitur cum magnitudo a , ad magnitudinem c , habeat rationem, quam numerus ad numerum, Magnitudo etiam b , habeat ad magnitudinem c , eandem rationem, quam numerus ad numerum, habebunt etiam a , & b , inter se eandem rationem, quam numerus habet ad numerum, ut vult 11. propos. lib. 5. ac propterea ex 5. propos. lib. huius commensurabiles erunt a , & b , Igitur quæ eidem magnitudini, & c . Quod erat ostendendum.

MONITUM.

Quamvis scholium Clauij quod sequitur demonstrationi nostræ minimè sit accommodatum. Non tamen abs re me facturum puto, si hoc in loco ponam, cum inutile non sit, imò perutile ad intelligentiam demonstrationis Clauij.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

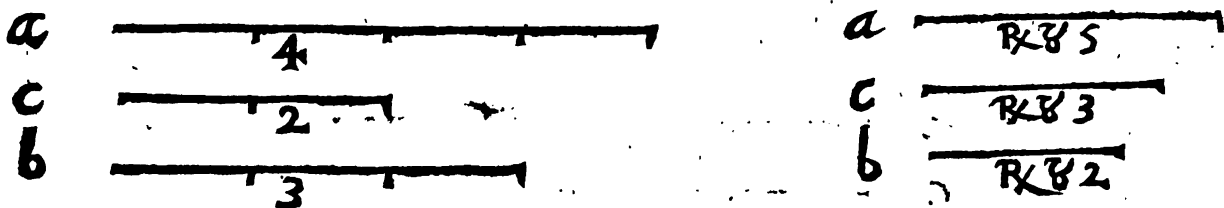
QVOD si magnitudines a, b, c , sint lineæ, atque a , & b ipsi c , longitudine commensurabiles existant, erunt quoque a , & b , inter se longitudine commensurabiles, ut constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas a , & b , proportionem habere, quam habet numerus h , ad numerum k . Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propositionem 6. diximus. Si vero a , & b , fuerint ipsi c , potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & a, b , inter se commensurabiles potentia. Cum enim a , & c , sint potentia commensurabiles; ^a erit quadratum ex a , ad quadratum ex c , ut numerus ad numerum, nempe, ut d , ad e , cum quadrata ex a, c , per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex c , ad quadratum ex b , ut numerus ad numerum, nimirum ut f , ad g . ^b Sumptis ergo in eisdem rationibus d , ad e , & f , ad g , tribus numeris minimis h, i, k , deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex a , ad quadratum ex b , ut numerus h , ad numerum k . ^c Quare quadrata ex a, b , commensurabilia sunt, atque adeò lineæ a, b , potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, a, b , potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet utraque cuiuspiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia verò tantum Rationali expostæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

Sed & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera verò sit vni cuiuspiam commensurabilis, erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT

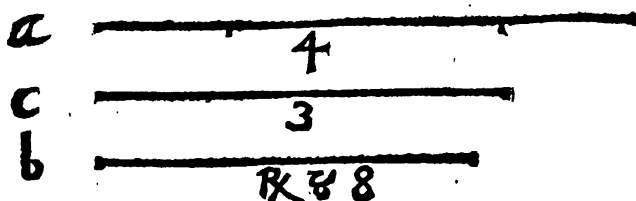
SINT enim $a, \& b$, commensurabiles: Sitque a , ipsi c , commensurabilis. Dico $\& b$, eidem c , commensurabilem esse. Cum enim tam b , quam c , ipsi a sit commensurabilis, erunt quoque $b, \& c$, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.



Quod si magnitudines a, b, c sint lineae, $\& a, b$, commensurabiles longitudine, sit autem a , ipsi c , commensurabilis longitudine; erit $\& b$, reliqua eidem c , longitudine commensurabilis. Nam cum tam b , quam c , ipsi a , longitudine sit commensurabilis, erunt etiam b, c , inter se commensurabiles longitudine, ut ostendimus. At verò si lineae $a, \& b$, potentia tantum sint commensurabiles, $\& a$, ipsi c , commensurabilis siue longitudine, $\& potentia$, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam b , eidem c , potentia esse commensurabilem; quia utraque b, c , ipsi a , hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si a , ipsi c , commensurabilis sit longitudine, reliquam b , eidem c , longitudine commensurabilem esse, quia non utraque b, c , ipsi a , longitudine commensurabilis est, sed c , quidem longitudine, at verò b , potentia tantum, ut ex hypothesi constat.

Theor. 10. Propos. 13.

SI sint duæ magnitudines, $\&$ altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines $a, \& b$, quarum una ipsi c , sit commensurabilis nimirum a ; b , verò eidem magnitudini incommensurabilis. Dico magnitudines $a, \& b$, incommensurabiles esse. Nam si essent magnitudines illæ $a, \& b$, commensurabiles: Cum a , ex hypothesi ipsi c , sit commensurabilis, essent $\& b, c$, inter se etiam commensurabiles, ut vult 12. propos. lib. huius. Quod est absurdum, cum b , ponatur ipsi c , incommensurabilis. Igitur magnitudo a , magnitudini c , incommensurabilis est. Quare si duæ magnitudines, $\& c$. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

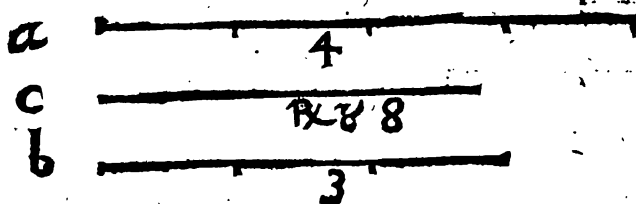
SI magnitudines a, b, c sint lineae, $\& a$, quidem ipsi c , longitudine commensurabilis, at b , eidem c , incommensurabilis longitudine: erunt $a, \& b$, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque b, c , esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, utraque b, c , ipsi a , commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si a , ipsi c , potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at verò b , eidem c , potentia incommensurabilis: erunt $a, \& b$, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque $b, \& c$, potentia commensurabiles, (cum hoc posito, utraque b, c , ipsi a , potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim b , ipsi c , potentia incommensurabilis.

Quoniam verò hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, ut posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Relinquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, $\&$ peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascriptum.

G

Theor. II. Propos. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuiuspiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.



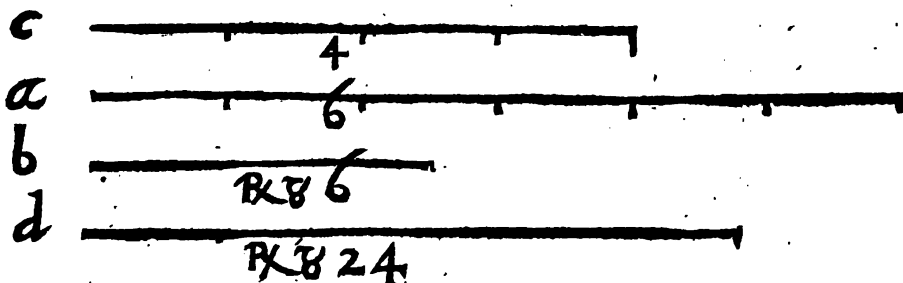
SINT duæ magnitudines commensurabiles a , & b , Sitque a , incommensurabilis magnitudini c , Dico & b , eidem c , incommensurabilem esse, Si enim a , ipsi c , commensurabilis esset, cum a , & b , ex hypothesi sint commensurabiles, essent & b , c , commensurabiles per 12. lib. huius. Quod est impossibile. Ponitur enim a , ipsi c , incommensurabilis. Non ergo magnitudines b , & c , sunt commensurabiles. Quare si sint duæ magnitudines, & c . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

H. I. C quoque si magnitudines a , b , c , sint lineæ, & a , b , commensurabiles longitudine; sit autem a , ipsi c , sine longitudine tantum, sine longitudine & potentia incommensurabilis; erit & b , eidem c , longitudine incommensurabilis. Si enim b , & c , essent longitudine commensurabiles, essent quoque a , & c , commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, utraque a , & c , ipsi b , longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim a , ipsi c , longitudine incommensurabilis. Quod si a , & b , commensurabiles sint potentia tantum, & a , ipsi c , potentia incommensurabilis colligamus eodem modo, & b , ipsi c , potentia incommensurabilem esse. Alias si b , c , potentia essent commensurabiles, & a , c , potentia commensurabiles essent (cum hoc posito, utraque a , & c , ipsi b , potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

Colligant: porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

Q V AE incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.



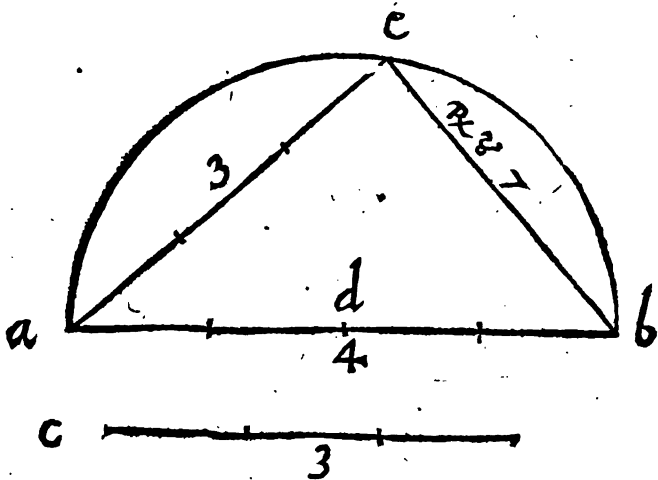
SINT duæ magnitudines incommensurabiles a , b , quibus commensurabiles sint c , & d , nempe c , ipsi a , & d , ipsi b , Dico c , & d , inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim a , & c , commensurabiles ponuntur, & est a , ipsi b , incommensurabilis, erit quoque reliqua c , eidem b , incommensurabilis. Rursus quia d , & b , commensurabiles ponuntur, & est b , ostensa ipsi c , incommensurabilis, erit & reliqua eidem c , incommensurabilis. Quod est propositum.

Si autem magnitudines a , b , c , d , sint lineæ, & a , b , vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem c , d , ipsi a , b , longitudine commensurabiles; erunt c , & d , eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si verò a , & b , incommensurabiles sint potentia, & ipsi potentia tantum commensurabiles c , & d , ostendimus similiter c , & d , potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

L E M M A.

D V A B V S datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quod maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propof. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, qua tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstrantur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datae duae rectae lineae inaequales $a b$, & c , quarum $a b$, maior, oportetque inuenire, quò $a b$, plus possit, quàm c . Diuisa $a b$, bisariam in d , describatur ex centro d , & intervallo $d a$, vel $d b$, semicirculus $a e b$, in quo aptetur recta $a e$, ipsi c aequalis, iungaturque recta $e b$. Dico rectam $a b$, plus posse, quàm c , quadrato rectae $e b$. Cum enim angulus e , in semicirculo rectus sit; erit quadratum ex $a b$, aequale quadratis ex $a e$, & $e b$, atque idcirco $a b$, plus poterit, quàm $a e$, hoc est, quàm c , quadrato rectae $e b$. Quod est propositum.



^a 1. quart.

^b 31. tertij.

^c 47. primi.

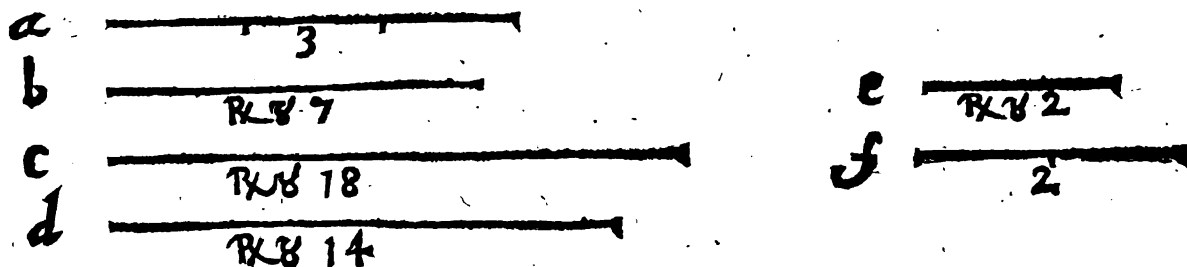
SIMILITER.

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propof. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datae duae rectae $a e$, & b , quæ si coniungantur ad angulum rectum e , poterit eas recta ducta $a b$, quippe cum quadratum ex $a b$, aequale sit quadratis ex $a e$, & b .

Theor. 12. Propof. 15.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.



SINT quatuor magnitudines proportionales a, b, c, d , primæque a , plus possit, quàm secunda quadrato rectae e , & c , tertia plus possit, quàm quarta d , quadrato rectae f . Dico si e , sit commensurabilis ipsi a , & f , commensurabilem esse ipsi c . Si verò e , incommensurabilis ipsi a , & f , recta c , incommensurabilem esse. Cum enim sit, ut a , ad b , secundam, ita c , ad d , quartam, erit eodem modo quadratum ex a , ad quadratum ex b , sicut quadratum ex c , ad quadratum ex d , ut constat ex 22. propof. lib. 6. Quadratum autem ex a , aequale est quadratis ex b , & e , quadratum-

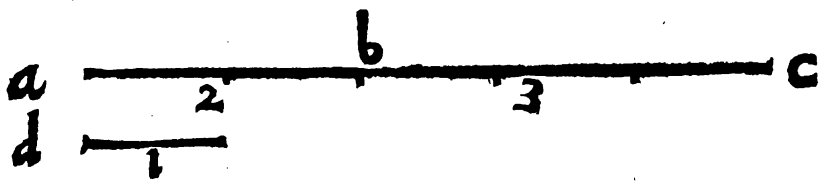
que ex c , æquale quadratis ex d, f , ex hypothesi. Quare componendo, ut quadrata ex b , & e , ad quadratum ex b . Ita quadrata ex d, f , ad quadratum ex d , & dividendo, ut quadratum ex e , ad quadratum ex b . Ita quadratum ex f , ad quadratum ex d , ac proinde erit, ut recta e , ad rectam b , ita recta f , ad rectam d , & conuertendo, ut b , ad e , ita d , ad f . Atqui ex æquo, ut a , ad e , ita c , ad f . Si igitur a , longitudine est commensurabilis ipsi e , erit pari ratione, & c , longitudine commensurabilis ipsi f ; Si verò a , ipsi e , incommensurabilis sit longitudine & c , etiam ipsi f , erit incommensurabilis longitudine. Si igitur quatuor, & c . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

EODEM argumento ostendemus, si e , potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi a , & f , potentia tantum ipsi c , esse commensurabilem, ut constat ex ijs, quæ in scholio propof. 10. huius lib. scripsimus.

Theor. 13. Propof. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



COMPONANTUR duæ magnitudines commensurabiles a, b, c . Dico totam a, c , ex illis duabus compositam utrique magnitudini a, b, c , esse commensurabilem. Quoniam enim a, b, c , sunt commensurabiles, habebunt aliquam communem mensuram utramque metientem, ut vult prima defin. lib. huius. Sit igitur illa communis mensura d . Igitur cum d , magnitudines a, b, c , metiatur, metietur & a, c , ex illis compositam, ut vult 1. pronunciatum Clauij lib. huius. Quare cum d , metiatur rectam a, c , & a, b , erunt a, c, a, b , commensurabiles per 1. defin. Parique ratione cum d , metiatur a, c , & b, c , erunt etiam magnitudines illæ commensurabiles, atque adeo a, c , utrique ipsarum commensurabilis erit.

Nunc igitur cum tota a, c , ex a, b, c , composita sit commensurabilis alteri ipsarum a, b, c , nimirum ipsi a, b . Dico a, b, c , esse inter se commensurabiles. Inueniatur igitur communis mensura ipsarum, sitque d . Quoniam d , metitur totam a, c , & ablatam a, b , metietur quoque d , reliquam b, c , per 3. pronunciatum: Igitur a, b, c , commensurabiles sunt, cum d , sit ipsarum communis mensura.

Si duæ igitur magnitudines, & c . Quod erat ostendendum.

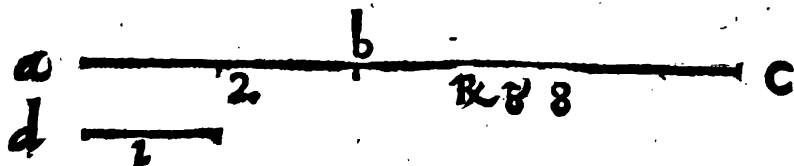
COROLLARIUM EX CLAVIO.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Ut si a, c , ipsi a, b , sit commensurabilis, esse quoque eandem a, c , reliquæ b, c , commensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematibus ostensum est, semper d , communis mensura totius a, c , & ablata a, b , cum metiatur totam a, c , & ablatam a, b , metietur quoque reliquam b, c , ex 3. pronunciatum. Quare commensurabiles sunt a, b, c , Quod est propositum.

Theor.

Theor. 14. Propos. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



SINT duæ magnitudines incommensurabiles a, b, c , simul composita, Dico totam magnitudinem a, c , utrique ipsarum a, b, b, c , esse incommensurabilem. Si enim non est incommensurabilis, sit igitur vni earum commensurabilis, quare magnitudines illæ habebunt aliquam communem mensuram, per 1. defin. Sitque illa d , quæ metiatur a, c , a, b , Igitur cum d , metiatur totam a, c , ablatamque a, b , metietur quoque d , reliquam b, c , ex tertio pronunciato Clavi, ac proinde cum d , sit communis mensura magnitudinum a, b, b, c , erunt a, b, b, c , commensurabiles. Quod est contra hypothesein. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est a, c , ipsi a, b , parique ratione nec ipsi b, c , commensurabilis, sed utrique ipsarum incommensurabilis.

Nunc verò tota a, c , ex a, b, b, c , composita incommensurabilis sit vni ipsarum componentium nimirum ipsi a, b , Dico & a, b, b, c , esse incommensurabiles. Si enim commensurabiles essent, erit quoque tota a, c , utrique a, b, b, c , commensurabilis, ut vult 16. propos. lib. huius. Quod est falsum, ponitur enim a, c , alteri ipsarum a, b , incommensurabilis. Non igitur commensurabiles sunt a, b, b, c , Parique ratione demonstrabitur a, b, b, c , incommensurabiles esse, modò a, c , magnitudini b, c , incommensurabilis fuerit. Duæ igitur magnitudines, & c . Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM EX CLAVIO.

SEQUITUR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si a, c , incommensurabilis sit ipsi a, b , esse quoque eandem a, c , reliquæ b, c , incommensurabilem. Si enim a, c , ipsi b, c , foret commensurabilis, effet quoque a, c , ex coroll. præcedentis proposit. reliquæ a, b , commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo a, c , ipsi b, c , commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

PERSPICVVM est in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura d , & e , quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

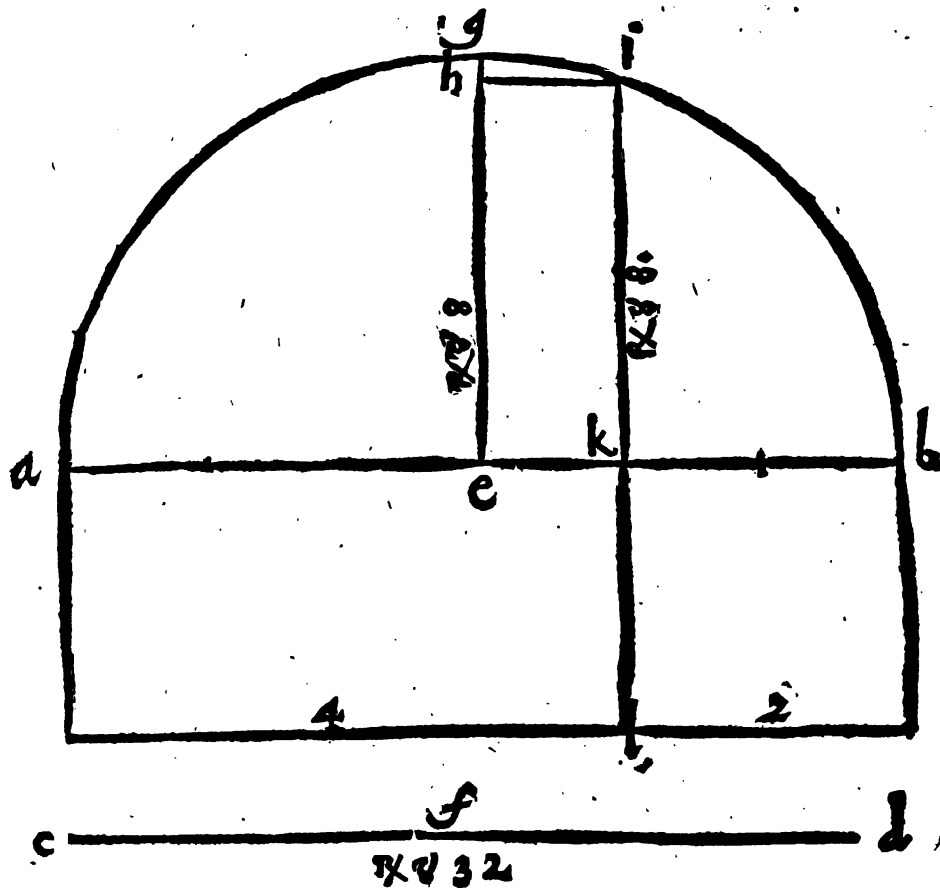
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstramus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

H

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propof. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore descripti minor sit rectangulo ad dimidium maioris lineæ applicato, deficientque figura quadrata, vt vult propof. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propof. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficientque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propofit. 28. lib. 6. libet tamen id ipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori.



SINT igitur data rectæ inæquales a, b, c, d , quarum a, b , maior sit, oporteatque ad a, b , applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum aequale sit quarta parti quadrati ex recta c, d , descripti. Sectis rectis a, b, c, d , bifariam in e, f , describatur ex centro e , & intervallo e, a , vel e, b , semicirculus agb , & ex e , perpendicularis ad a, b , ducatur eg . Et quia tota a, b , maior ponitur, quam tota c, d , erit quoque a, e , dimidia ipsius a, b , hoc est e, g , ipsi a, e , aequalis, maior, quam c, f , dimidia ipsius c, d . Posita igitur e, h , equali ipsi c, f , agatur per h , ipsi a, b , parallela hi , demittaturque ikl , ad a, b , perpendicularis, & sit kl , ipsi kb , aequalis; Ac tandem perficiatur rectangulum al , & quadratum bl . Dico parallelogrammum al , applicatum ad rectam a, b , deficiens figura quadrata bl , aequale esse quarta parti quadrati rectæ c, d . Quoniam enim ki , media proportionalis est inter a, k , k, b , ut in scholio propof. 13. lib. 6. tradidimus; erit rectangulum sub a, k, k, b , hoc est, rectangulum al , aequale quadrato ex k, i , hoc est, quadrato ex e, h ; (est enim ki , ipsi e, h , aequalis, ob parallelogrammum e, i ,) hoc est, quadrato ex c, f . Est autem quadratum ex c, f , quarta pars quadrati ex c, d , quod quadratum ex c, d , per scholium propof. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex c, f . Igitur parallelogrammum al , ad rectam a, b , applicatum deficiensque quadrato bl , aequale est quarta parti quadrati ex c, d , descripti. Quod est propositum.

^a 17. sexti.

^b 34 primi.

SCHOLIUM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

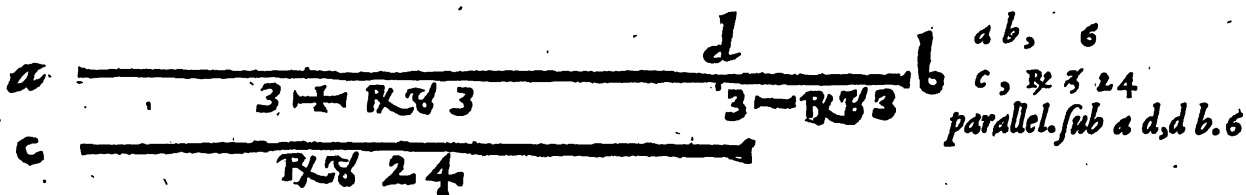
Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data $a b$, & rectilineum quodcumque, cui æquale ponatur quadratum ex $c f$, non maius, quàm quadratum ex dimidia $a e$, ita ut latus $c f$, non maius sit latere $a e$. Educta ergo ad $a b$, perpendiculari $e g$, sit $e b$, æqualis ipsi $c f$. Deinde acta $b i$, parallela ipsi $a b$, demittatur $i k$, perpendicularis ad $a b$. Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus $a k, k b$, æquale esse quadrato ex $i k$, hoc est, quadrato ex $c f$, atque adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex $c f$. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta $c f$, maior, quàm recta $e g$. Quare ex $e g$, abscindi non posset recta ipsi $c f$, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt æqualia.

SINT dua rectæ inæquales $a b$, & c ; & ad maiorem $a b$, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore c , descripti, ita ut $d b$, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta $a d, d b$, inæqualia esse.



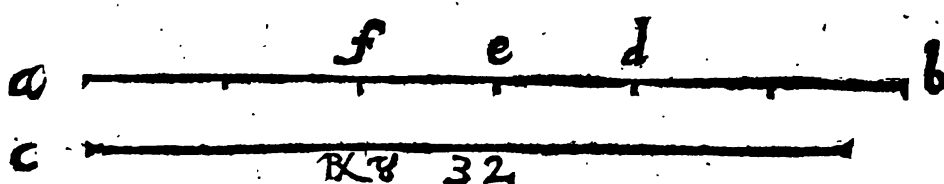
SI enim $a d, d b$, segmenta dicantur esse equalia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad $a b$, deficiensque figura quadrata ex $d b$, descripta, æquale sit rectangulo sub $a d, d b$, sit autem quod sub equalibus $a d, d b$, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex $a d$, dimidio ipsius $a b$, descriptum atque adeò ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum ex $a b$, quadruplum erit ipsius parallelogrammi. Est autem & quadratum ex c , per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ parti, quadrati ex c . Igitur quadrata rectarum ex $a b$, & c , equalia sunt, atque rectæ $a b$, & c , æquales. Quod est absurdum. ponantur enim inæquales, & $a b$, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta $a d, d b$, Quod est propositum.

Hoc facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem $e b$, æqualis dimidiata parti ipsius $c d$, nempe ipsi $c f$, ductaque $b i$, parallela ipsi $a b$, & tandem demissa perpendicularis $i k$, ut partes factæ ex applicatione sint $a k, k b$; manifestum est $a k, k b$, segmenta esse inæqualia, cum $a b$, in e , secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

Theor. 15. Propof. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens

figura quadrata : in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.



ab ,	6
af ,	2
fe ,	1
ed ,	1
db ,	2

Parallelogrammum contentum sub a , d , b , 8.

SINT due rectae inaequales a , b , & c , quarum a , b , maior, appliceturque ad maiorem a , b , parallelogrammum aequale quartae parti quadrati ex minore c , descripti deficiens figura quadrata, illudque agatur ut docet lemma secundum Clauij propos. antecedentis, sitque illud quod sub a , d , b , continetur, sinique segmenta a , d , b , longitudine commensurabilia. Dico rectam a , b , plus posse, quam c , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

Nam cum ex lemmate 3. Clauij antecedentis propos. a , d , sit maior, quam d , b , & a , b , diuisa sit bifariam in puncto e , ipsique e , d , sumpta sit aequalis e , f , erunt tota e , a , & e , b , aequales atque & ablata e , f , & e , d , ac propterea & reliqua a , f , & d , b , aequales. Et quoniam recta a , b , diuisa est bifariam in puncto e , & non bifariam in d , rectangulum sub a , d , b , vna cum quadrato ex e , d , aequale erit quadrato ex e , b , descripto, ut vult 5. propos. lib. 2. Ac proinde quadratum rectanguli sub a , d , b , & quadrati ex e , d , aequale erit quadruplo quadrati ex a , b , descripti. Est autem quadruplo rectanguli sub a , d , b , contenti aequale quadratum ex c , (rectangulum enim sub a , d , b , aequale ponitur quartae parti quadrati ex c) & quadruplo quadrati ex e , d , aequale est quadratum ex f , d , ut constat ex scholio Clauij propos. 4. lib. 2. cum f , d , dupla sit ipsius e , d , & quadruplo quadrati ex e , b , aequale est quadratum ex a , b , ut constat ex eodem scholio Clauij propos. 4. lib. 2. Quare quadrata ex rectis c , & f , d , aequalia erunt quadrato ex a , b , Atque adeo & recta a , b , plus potest, quam c , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis nempe f , d .

Quod autem sit f , d , recta a , b , longitudine commensurabilis, sic demonstratur, cum recta a , d , b , ex constructione longitudine sint inter se commensurabiles erit tota a , b , parti d , b , longitudine commensurabilis, ut colligitur ex 16. propos. huius lib. Est autem & ipsi d , b , composita ex d , b , a , f , longitudine commensurabilis, cum composita ex d , b , a , f , dupla sit ipsius d , b .

Igitur cum utraque a , b , & composita ex d , b , a , f , longitudine sit commensurabilis ipsi d , b , erunt quoque & a , b , & composita ex d , b , a , f , longitudine inter se commensurabiles. Ac propterea cum a , b , sit composita ex a , f , d , b , tanquam vna, & ex f , d , commensurabilis sit longitudine composita ex a , f , d , b , erit eadem a , b , ex corollario Clauij propos. 16. lib. huius longitudine commensurabilis reliqua f , d , Quare a , b , plus potest, quam c , quadrato rectae f , d , sibi commensurabilis longitudine.

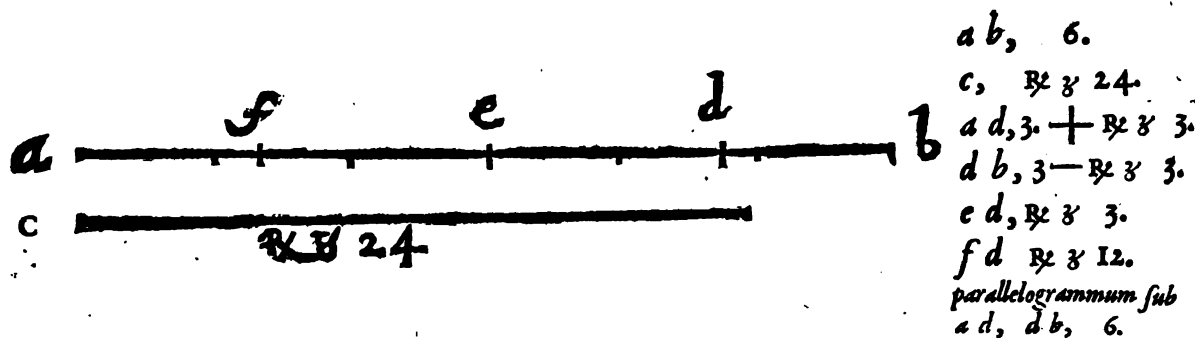
Iam vero a , b , plus possit, quam c , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, quarta autem parti quadrati ex c , descripti applicatum sit aequale parallelogrammum deficiensque figura quadrata, faciens segmenta a , d , b , longitudine commensurabilia. Dico rectas a , d , b , esse commensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis ut supra, facile erit demonstrare rectam a , b , plus posse, quam c , quadrato rectae f , d , Quoniam cum a , b , ponatur plus posse, quam c , quadrato rectae f , d , sibi longitudine commensurabilis, erunt rectae a , b , f , d , longitudine commensura-

biles: Tota igitur $a b$, composita ex $f d$, & ex $a f, d b$, tanquam una commensurabilis existens ipsi $f d$, erit $a b$, etiam longitudine commensurabilis reliqua composita ex $a f, d b$, ex corollario Clauij propof. 16. lib. huius. Est autem composita ex $a f, d b$, ipsi $d b$, longitudine commensurabilis, cum sit eius dupla. Quare cum tam $a b$, quam $d b$, longitudine commensurabilis sit composita ex $a f, d b$, erunt quoque & $a b, d b$, inter se longitudine commensurabiles, atque adeo cum tota $a b$, componatur ex $a d, d b$, quæ commensurabiles sunt longitudine ipsi $d b$, erunt $a d, d b$, inter se etiam longitudine commensurabiles, ut vult 16. propof. lib. huius.

Si fuerint igitur due rectæ, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 16. Propof. 19.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.



Sint due rectæ inæquales $a b$, & c , quarum $a b$, maior sit, & ad maiorem $a b$, applicetur parallelogrammum æquale quartæ parti quadrati ex minore c , descripti deficiensque figura quadrata, sitque quod sub $a d, d b$, continetur, faciens segmenta longitudine incommensurabilia $a d, d b$. Dico $a b$, plus posse, quàm c , quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis.

Quoniam enim ex 3. lemmate Clauij antecedentis propositionis $a d$, maior est, quàm $d b$, Diuidatur $a b$, bifariam in puncto e , ipsique $e d$, sumatur alia æqualis $e f$, Igitur cum tota $e a$, $e b$, sint æquales nimirum dimidia ipsius $a b$, & ablata quoque æquales erunt necessario, & reliquæ æquales, ut vult propof. 19. lib. 5. Quoniam verò recta $a b$, diuiditur in puncto e , bifariam, & non bifariam in puncto d , erit rectangulum sub $a d, d b$, unà cum quadrato ex $e d$, æquale quadrato ex $e b$, dimidia ipsius $a b$, ut constat ex 5. propof. lib. 2. Ac propterea quadratum rectanguli sub $a d, d b$, & quadrato ex $e d$, æquale erit quadruplo quadrati ex $a b$, Est autem quadruplo rectanguli sub $a d, d b$, æquale quadratum ex c . Ponitur enim rectangulum contentum sub $a d, d b$, æquale quartæ parti quadrati ex minore c , descripti, & quadruplo quadrati ex $e d$, æquale est quadratum ex $f d$, per ea, quæ tradidit Clauius in scholio propof. 4. lib. 2. cum recta $f d$, ipsius $e d$, sit dupla, Et quadruplo quadrati ex $e b$, æquale est quadra-

rum ex $a b$, cum etiam $a b$, dupla sit ipsius $e b$, Igitur quadrata ex c , & $f d$, aequalia sunt quadrato ex recta $a b$, descripto. Quare recta $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectae $f d$.

Quod autem $f d$, longitudine incommensurabilis existat ipsi $a b$, sic demonstrabimus. Quoniam recta $a d$, $d b$, longitudine ponuntur incommensurabiles, erit quoque tota $a b$, parti $d b$, longitudine incommensurabilis, ut constat ex 17. propos. lib. huius. $d b$, verò commensurabilis est longitudine compositae ex $d b$, $a f$, Cum hac illius dupla sit. Quare cum duarum magnitudinum commensurabilium $d b$, & quae componitur ex $d b$, $a f$, ipsa $d b$, sit incommensurabilis longitudine, erit reliqua composita ex $a f$, $d b$, eidem $a b$, longitudine incommensurabilis, ut vult 14. propos. lib. huius: Atque adeò cum $a b$, componatur ex $a f$, $d b$, tanquam vna, & ex $f d$, incommensurabilis existat longitudine composita ex $a f$, $d b$, erit eadem $a b$, reliqua $f d$, longitudine incommensurabilis, ut patet ex coroll. Clavii propos. 17. lib. huius. Quocirca $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectae $f d$, quae ei longitudine est incommensurabilis.

Iam verò $a b$, plus possit, quam c , quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, quanta verò parti quadrati ex minore c , descripti aequale parallelogrammum applicatum sit ad $a b$, deficientisque figura quadrata, sintque in recta $a b$, partes $a d$, $d b$, longitudine incommensurabiles. Iisdem constructis ut supra, facile erit demonstrare ut prius, rectam $a b$, plus posse quadrato rectae $f d$.

Igitur cum $a b$, ex hypothese ponatur plus posse, quam c , quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, erit & $a b$, ipsi $f d$, longitudine incommensurabilis. Quare cum tota $a b$, componatur ex $f d$, & ex $a f$, $d b$, tanquam vna existatque incommensurabilis longitudine ipsi $f d$, erit ex coroll. Clavii propos. 17. lib. huius $a b$, reliqua composita ex $a f$, $d b$, etiam longitudine incommensurabilis.

Est autem ea, quae componitur ex $a f$, $d b$, ipsi $d b$, longitudine commensurabilis, cum sit illius dupla. Igitur cum duarum magnitudinum commensurabilium nimirum, quae ex $a f$, $d b$, componitur & $d b$, ipsa composita ex $a f$, $d b$, longitudine incommensurabilis sit ipsi $a b$, erit & reliqua $d b$, eidem $a b$, incommensurabilis longitudine, ut docet 14. propos. lib. huius. Ac propterea cum tota $a b$, componatur ex $a d$, $d b$, quae incommensurabilis est ipsi $d b$, erunt rectae $a d$, $d b$, inter se incommensurabiles longitudine per 17. propos. lib. huius.

Quare si fuerint duae rectae inaequales, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM I. CLAVII.

Egit haecenus Euclides, de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad Rationales, & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

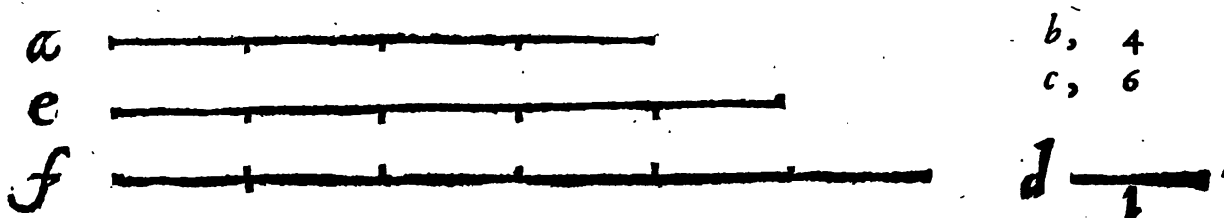
QUONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si verò exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & alia lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, in quam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales potentia solum inter se commensurabiles.

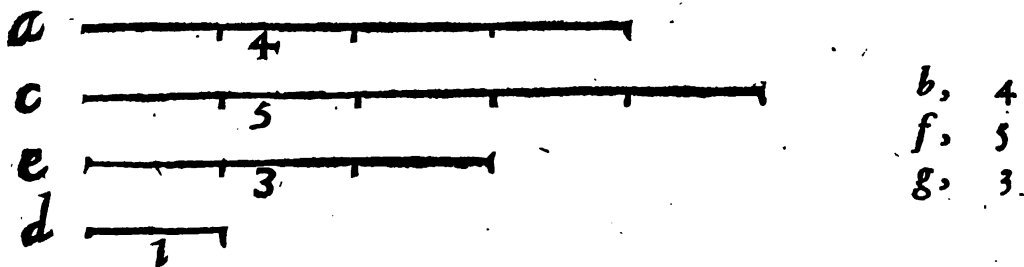
SCHOLIUM II.

IT A Q V E ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inuenimus hoc modo.



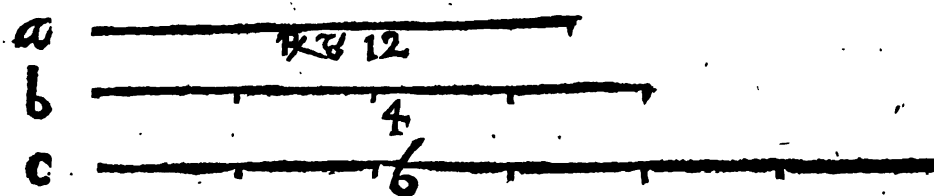
Sit exposita Rationalis a , diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero b , Sumpto deinde quolibet alio numero c , Sit d , recta una partium rectæ a ; & quoties d , metitur lineam a , toties metiatur quandam aliam e . Item quoties unitas est in c , toties eadem d , metiatur quampiam aliam lineam f . Quoniam igitur a , & e , componuntur ex partibus multitudinis æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi d , ipsæ æquales erunt. Rursus quia d , metitur omnes tres a , e , & f , erunt omnes tres a , e , & f , longitudine commensurabiles. Quare e , & f , Rationalis a , commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sans autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant d , communem mensuram. Inuenta ergo sunt duæ Rationales e , f , longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali a , & quarum una nempe e , æqualis est Rationali expositæ a .

Iam verò d , metiatur duas lineas quasdam c , e , per duos numeros f , g , quorum neuter idem sit qui b , ita ut utraque linea c , & e , inæqualis sit ipsi a , erunt igitur ut prius, tres rectæ a , c , e , mensuram habentes communem d , longitudine com-



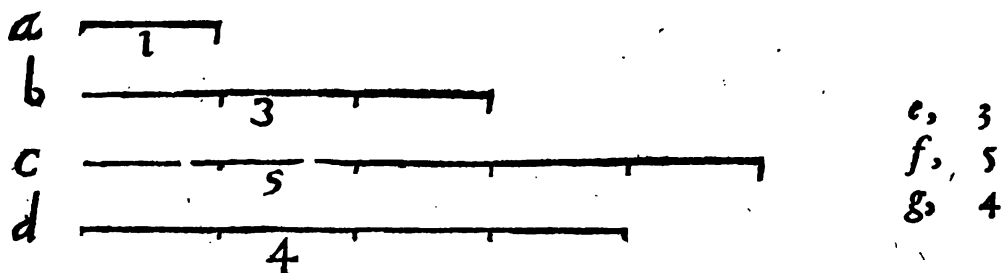
mensurabiles. Quare c , e , Rationali a , longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles, inuenta erunt duæ Rationales c , e , longitudine commensurabiles, & inter se, & expositæ Rationali a , quarum neutra æqualis est Rationali expositæ a .

Postremò expositæ Rationali a , inueniatur recta b , longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quocunque par-^{te} XII. decimi.



res aequales, & sumatur c , composita ex aliis quocunque partibus, qua magnitudine aequales sint partibus rectae b . Quo facto erunt b , & c , longitudine commensurabiles. Disco easdem exposita Rationali a , potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim a , b , potentia sunt commensurabiles, erit quadratum ex a , quadrato ex b , commensurabile. Est autem eidem quadrato ex b , commensurabile quadratum ex c , quod b , c , longitudine sunt commensurabiles, atque adeo & potentia. Igitur quadrata rectarum a , & c , commensurabilia quoque inter se sunt. Quare c , ipsi a , potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum b , c , longitudine commensurabilium b , est ipsi a , longitudine incommensurabilis, erit quoque reliqua c , eidem a , longitudine incommensurabilis. Est ergo c , solum potentia ipsi a , commensurabilis. Et quia b , & c , Rationali exposita a , potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inventa erunt duae Rationales b , c , longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles exposita Rationali a , Quod est propositum.

Quod si quis optet invenire quocunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo.

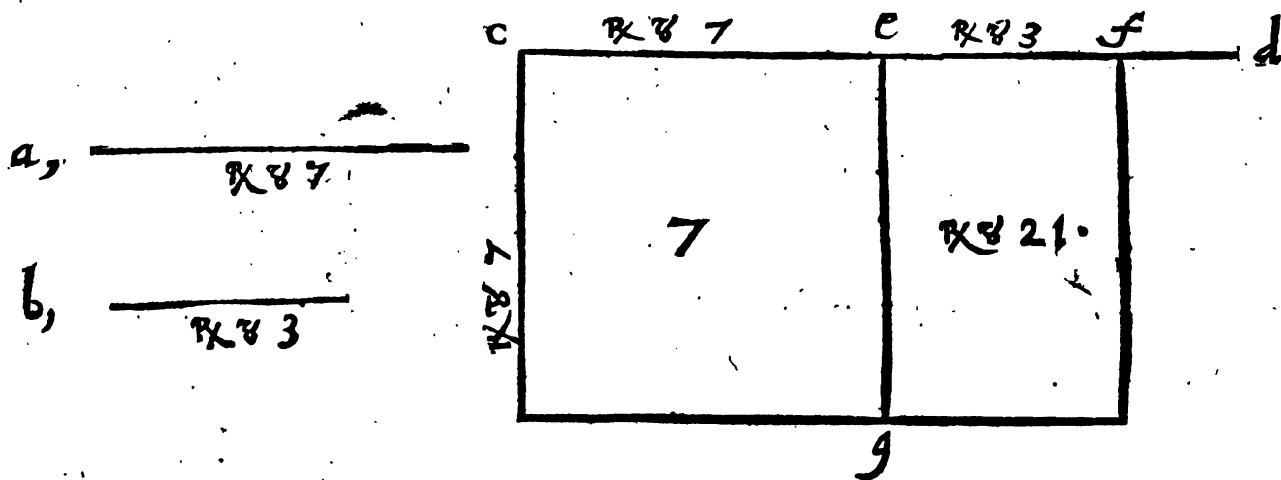


Sumpta mensura quavis a , componentur quolibet linea b , c , d , ex tot partibus ipsi a , aequalibus, quot sunt unitates in totidem numero inaequalibus e , f , g . Nam linea b , c , d , habentes communem mensuram a , longitudine commensurabiles erunt.

Ceterum & omnes lineas Rationales, non solum exposita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineae sunt, quae exposita Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; quae autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt, manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.

LEMMA III.

Si sint duae rectae lineae, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



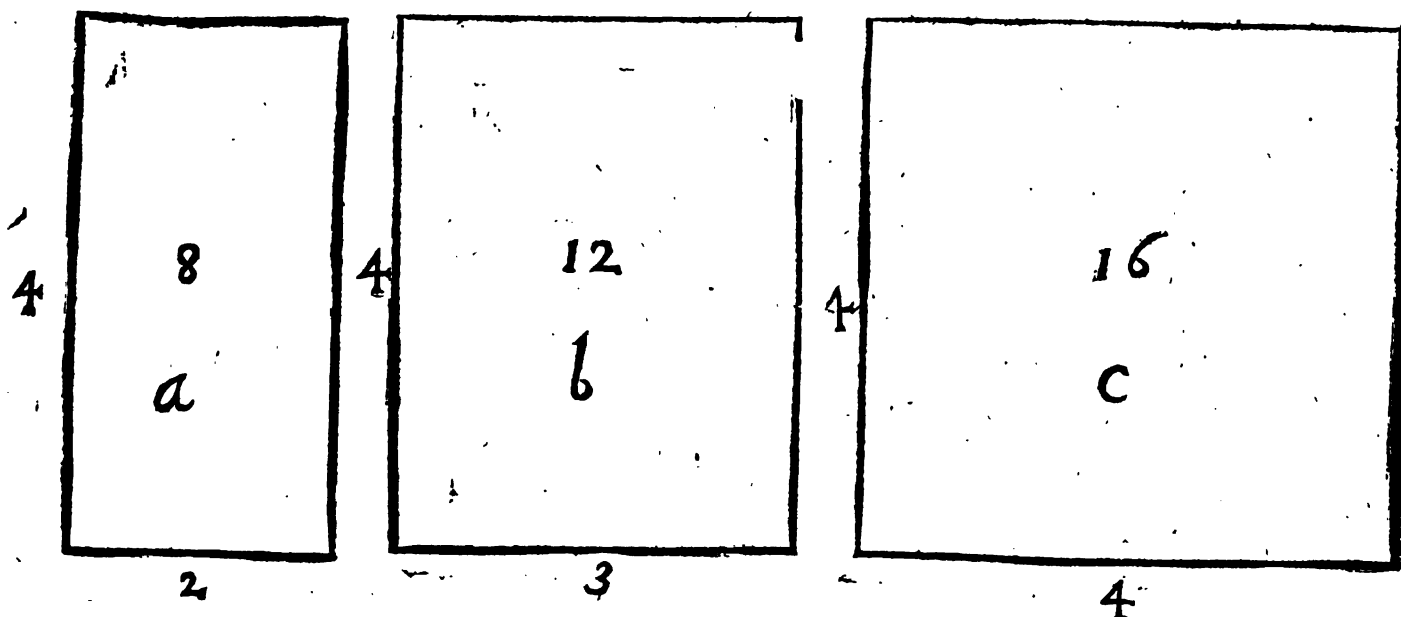
SINT duae rectae a , & b , Dico esse ut a , ad b , ita quadratum ex a , ad rectangulum sub a , & b , comprehensum. Ex quacunque enim linea recta c , abscindatur c , e , ipsi a , aequalis & e , ipsi b , deinde super c , e , describatur quadratum c g , perficiaturque rectangulum g f , consentum sub c , e , & e , f , hoc est, sub a , & b . Quoniam igitur est ut c , e , ad e , f , hoc est, ut a , ad b , ita parallelogrammum c g , hoc est, quadratum ex a , ad parallelogrammum g f , sub a , & b , comprehensum; perspicuum est, si sint duae rectae lineae, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

Eodem modo erit, ut b , ad a , ita rectangulum f g , ad quadratum g c . Quod est propositum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIUM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

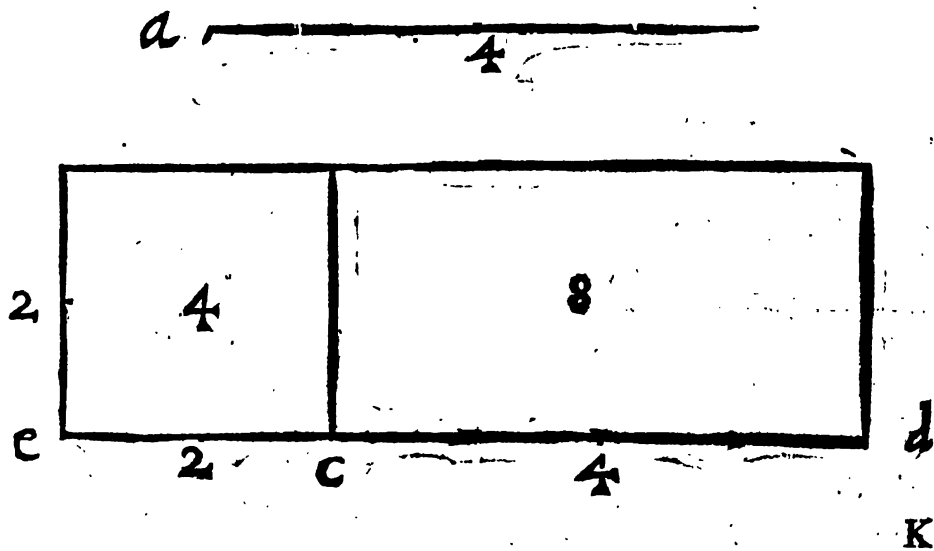


SIT spatium a , commensurabile Rationali spatio b , Dico & a , Rationale esse. Sit namque c , quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur b , Rationale est, erit ipsum Rationali c , commensurabile: Est autem & a , ipsi b , commensurabile. Igitur a , & c , cum commensurabilia sint ipsi b , inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium a , Rationali quadrato c , ex Rationali linea exposita descripta commensurabile, Rationale est. Quod erat demonstrandum.

Theor. 17. Propos. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale est.

EXPONATUR Rationalis linea a , describaturque rectangulum $b d$, sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus contentum, nempe $b c$, $c d$, secundum aliquem prædictorum modorum, quos Clavius in scholio 2. antecedentis propos. tradidit.

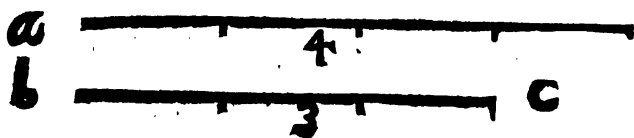


DICO rectangulum $b d$, esse Rationale. Describatur ex altera earum nimirum ex $b c$, quadratum $b e$, Quoniam igitur $b c$, est Rationalis, Rationalique a , exposita commensurabilis longitudine, erit quoque quadratum $b e$, ex $b c$, descriptum quadrato ex a , commensurabile, ut vult 3. definitio lib. huius. At quadratum ex a , Rationali, Rationale est, ratione cuius alia Rationalia, vel Irrationalia dicuntur. Quare quadratum $b e$, illi commensurabile, Rationale est, ut vult 9. defin. lib. huius. Quoniam verò $b c$, hoc est $e c$, & $c d$, longitudine sunt commensurabiles (sunt enim ex hypothesi $b c$, $c d$, Rationales, & inter se longitudine commensurabiles) estque, ut $e c$, ad $c d$, ita $e b$, ad $b d$. per 1. propos. lib. 6. Quare rectangulum $b d$, & quadratum $b e$, commensurabilia sunt, ut vult 10. defin. lib. huius. Constat igitur ex 4. lemmate Clavij antecedentis propos. $b d$, Rationali $b e$, commensurabile, Rationale esse.

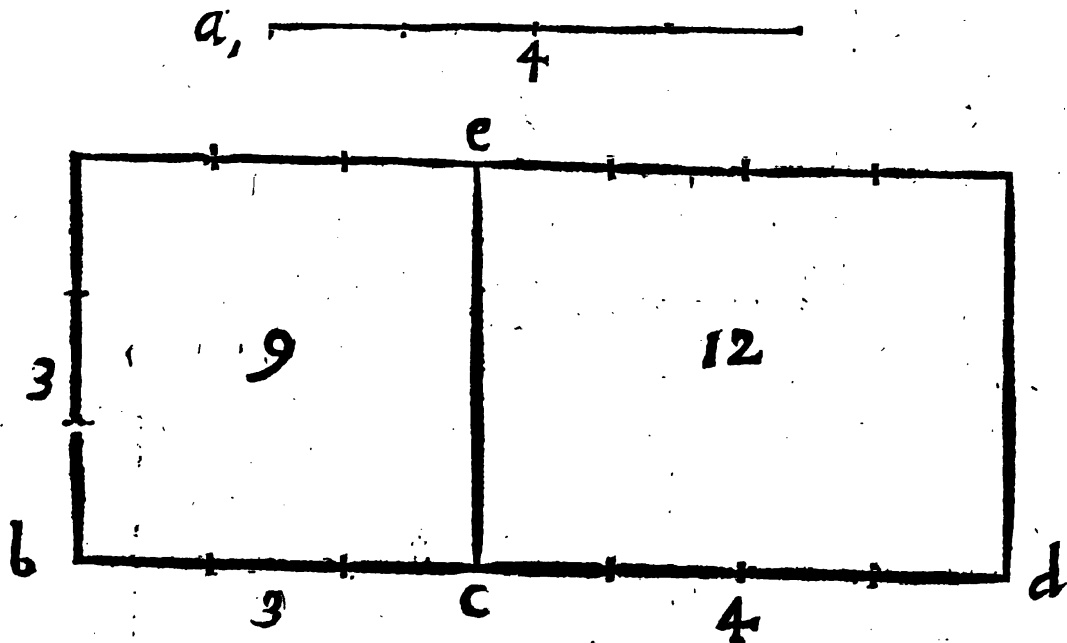
Quare sub Rationalibus longitudine, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 18. Propos. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



EXPONATUR Rationalis a , & alia etiam Rationalis $b c$, secundum aliquem praedictorum modorum, quos Clavius tradidit in scholio 2. propositionis antecedentis, & ad Rationalem $b c$, applicetur Rationale $e d$, faciens latitudinem $c d$, Dico $c d$, esse Rationalem, & ipsi $b c$, commensurabilem longitudine.



EX $b c$, verò describatur quadratum $b e$, quod quidem erit Rationale, cum linea $b c$, ex hypothesi sit Rationalis. Quoniam verò $b e$, $e d$, Rationalia sunt erunt commensurabilia quadrato ex Rationali a , descripto, ut patet ex 9. defin. lib. huius, ac proinde & inter se commensura-

bilia. Est autem eadem ratio inter b & e , & e & d , quæ inter e & c , hoc est, b & c , & c & d , per 1. propos. lib. 6. Quare b & c , c & d , sunt longitudine commensurabiles, ut docuit Clavius in scholio propos. 10. lib. huius. Igitur c & d , ipsi b & c , longitudine commensurabilis est: Sed & Rationalis, cum Rationali b & c , atque adeò Rationali proposita a , longitudine commensurabilis sit, ut Clavius tradidit in scholio 12. propos. lib. huius. Latitudo igitur c & d , Rationalis est, ipsique b & c , commensurabilis longitudine.

Igitur Rationale ad Rationalem applicatum, & c. Quod erat ostendendum.

LEMMA I. EX CLAVIO.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.



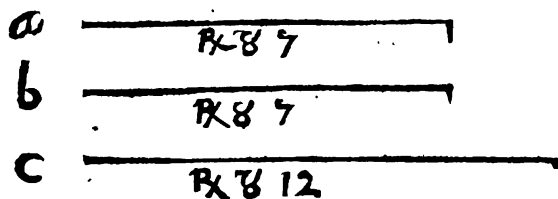
POSSIT recta a , spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex a , æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico a , Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, ut in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. Quod est absurdum. Ponitur enim Irrationale. Non ergo a , Rationalis est. Igitur Irrationalis.

Hoc idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi linea potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

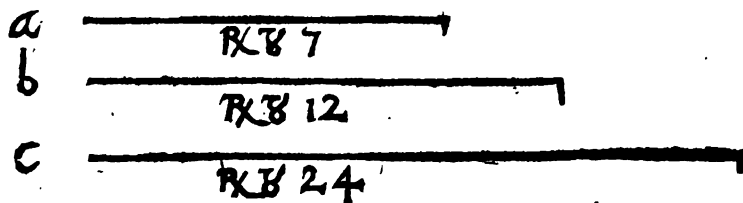
DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium: Aut enim altera earum est æqualis exposita Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus.



SIT exposita Rationalis a , cui æqualis sumatur b , Deinde ipsi b , inueniatur c , longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur b , & c , ipsi a , commensurabiles sunt, (b , quidem, quod ei sit æqualis; at c , ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi b , atque adeò ipsi a .) Rationales erunt b , & c : Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuenta ergo sunt due Rationales b , & c , potentia tantum commensurabiles, quarum altera nempe b , exposita Rationali a , æqualis est.

Posterioris autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis a , cui longi-



tudine tantum incommensurabilis inueniatur b , & huic rursus longitudine tantum incommensu-

rabilis c , maior aut minor quam a , Dico b, c , esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendimus. Quoniam a, c , ipsi b , potentia sunt commensurabiles; erunt & a, c , commensurabiles potentia, ut in scholio propof. 12. huius lib. demonstrauiamus. Quare cum utraque b, c , exposita Rationali a , sit potentia commensurabilis, erunt b, c , Rationales. Inuenta ergo sunt b , & c , Rationales potentia tantum commensurabiles.

^a 6. defin.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOD si inuenienda sint quotcumque linea Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur, id hac ratione.

Sumantur per ea, quae in scholio propof. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot linea Rationales quaruntur, nempe a, b, c, d . Deinde sumpta linea Rationali e , fiat ut a , ad b , ita quadratum ex e , ad quadratum ex f , ut in coroll. propof. 6. huius lib.

a , 5	e	$\overline{PKB 5}$
b , 7	f	$\overline{PKB 7}$
c , 3	g	$\overline{PKB 3}$
d , 2	h	$\overline{PKB 2}$

ius lib. ostendimus. Item ut b , ad c , ita quadratum ex f , ad quadratum ex g , & denique ut c , ad d , ita quadratum ex g , ad quadratum ex h . Dico rectas e, f, g, h , Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri a, b, c, d , (nempe quadratum ex e , ad quadratum ex f , ut numerus a , ad numerum b , ex constructione, similiterque quadratum ex f , ad quadratum ex g , ut b , ad c , & quadratum ex g , ad quadratum ex h , ut c , ad d . At vero ex aquo quadratum ex e , ad quadratum ex g ; ut a , ad c , Similiterque quadratum ex e , ad quadratum ex h , ut a , ad d , & denique quadratum ex f , ad quadratum ex h , ut b , ad d ,) erunt ipsa inter se commensurabilia ac propterea, & recta ipsa potentia saltem commensurabiles. Existente ergo e , Rationali, erunt & reliqua f, g, h , Rationales. Quod autem potentia sint tantum commensurabiles, ita ostendimus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis a, b, c, d , numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum e, f, g, h , proportionem, quam numeri quadrati. Quare rectae e, f, g, h , longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

^b 6. decimi.

^c 9. decimi.

Quod si propositis quotcumque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quae omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositae dua Rationales potentia tantum commensurabiles a, b , quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus c , ad numerum d :

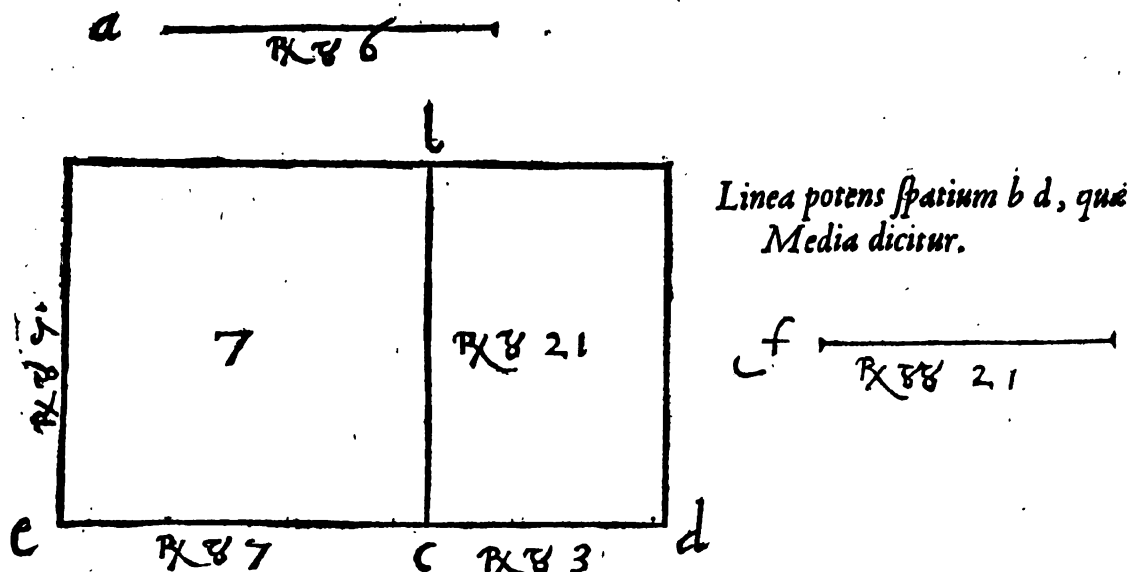
a	$\overline{PKB 10}$	c , 10
b	$\overline{PKB 6}$	d , 6
f	$\overline{PKB 7}$	e , 7

Sumpto autem alio numero e , qui ad quemlibet ipsorum c, d , primus sit; (inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum c, d , metiatur) fiat ut d , ad e , ita quadratum linea b , ad quadratum linea f , per coroll. propof. 6. huius lib. Dico f , Rationalem esse, & ipsis a, b , potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali b , saltem potentia, cum quadrata rectarum b, f , proportionem habeant, quam numeri d, e , commensurabilia sint. Cum ergo proportio d , ad e , non sit qua numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus; (quod d , & e , qui ambo non sunt quadrati, cum e , primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, idcirco pluri non similes, ac proinde ex eis, quae in scholio propof. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) erunt rectae b, f , longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt a , & f , potentia solum commensurabiles. Nam ex aquo erit quadratum ex a , ad quadratum ex f , ut c , numerus ad numerum e . Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendimus perinde, ut idem demonstrauiamus de numero d , & e) erunt a, f , longitudine incommensurabiles, & c.

Theor.

Theor. 19. Propos. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solùm commensurabilibus rectis lineis continetur Rectangulum, Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.



EXPONATUR Rationalis a , atque rectangulum $b d$, contentum ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus. Dico rectangulum $b d$, esse Irrationale, & rectam cuius quadratum æquale erit rectangulo $b d$, esse Irrationalem, quæ Media vocabitur.

Describatur ex altera illarum nimirum ex $b c$, quadratum $b e$, Igitur cùm linea $b c$, sit Rationalis, erit & quadratum ex ea descriptum, Rationale, ut vult 8. defin. lib. huius.

Quoniam verò per 1. propos. lib. 6. est, ut $e c$, id est, $b c$, ad $c d$, ita $b e$, ad $b d$, Sint autem $b c$, & $c d$, incommensurabiles longitudine ex hypothesi, erit per ea, quæ docuit Clavius in scholio propos. 10. huius lib. quadratum $b e$, rectangulo $b d$, incommensurabile. Quare cùm quadratum $b e$, quadrato ex a , Rationali descripto sit commensurabile, cùm utraque sint Rationalia, sit autem quadratum ex $b e$, rectangulo $b d$, incommensurabile, erit quoque quadratum ex Rationali exposita a , eidem rectangulo $b d$, incommensurabile, ut constat ex 14. propos. huius lib. Ac propterea rectangulum $b d$, incommensurabile existens quadrato Rationalis a , proposita, Irrationale est: ut constat ex 10. defin. lib. huius & recta potens Rectangulum illud, Irrationalis.

Hæc autem linea nimirum f , appellabitur Media, quæ Rectangulum $b d$, poterit. Cùm sit media proportionalis inter rectas $b c$, $c d$, Rationales potentia solùm commensurabiles: Quadratum enim illius æquale erit Rectangulo $b d$, sub rectis $b c$, $c d$, contento.

Igitur quod sub Rationalibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

ITA QVÆ omnis linea Media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cùm enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theore. n. 17. sexti. te ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm inter se commensurabilibus contentum. Nam solâ hæc linea, Media hoc loco appellatur.

Ut autem rectè hoc loco monet Campanus, non solùm recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum

lum illud, Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilibus, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est, inter dictas Rationales. Nam si tres lineae sint continue proportionales, quales sunt b, c, d , & recta Irrationalis, quae Media dicitur, & c, d , erunt quoque rectilineae similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, ut in scholio propof. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare quadratum ex Media descriptum, medium proportionale est inter quadrata rectarum b, c, d , idcirco Medium appellari potest.

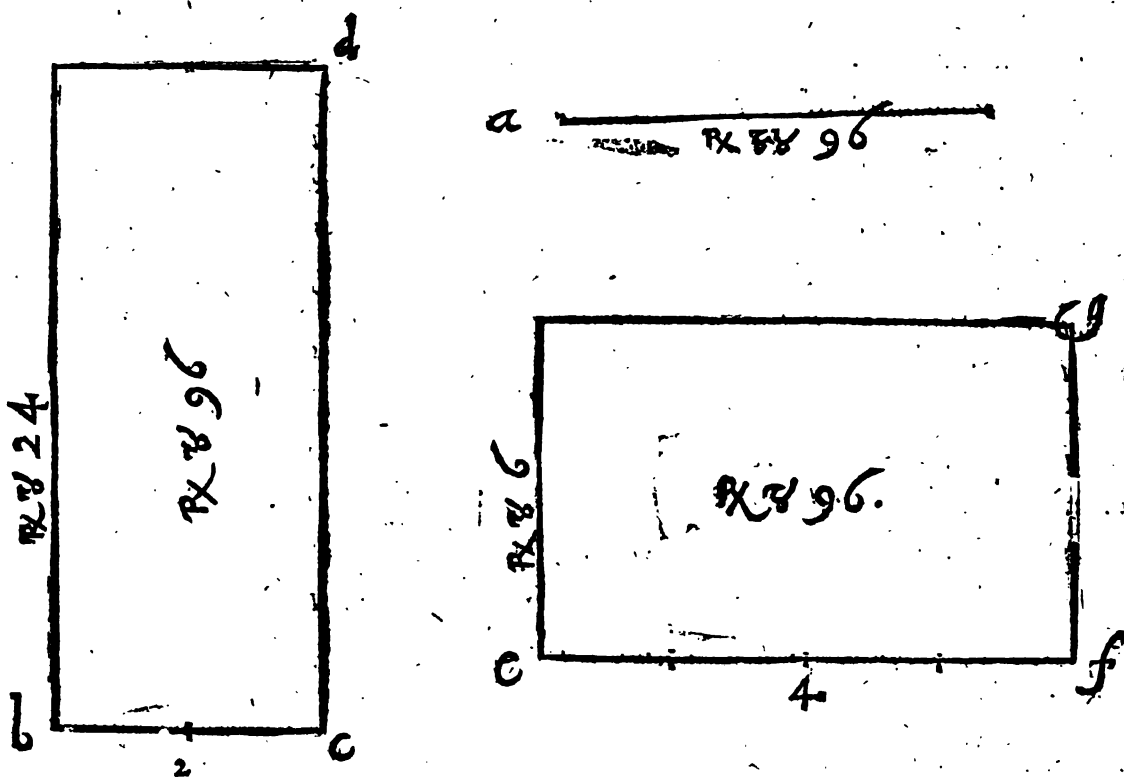
Hoc autem non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium b, d , hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medius longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propof. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocatur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, ut ostendimus. At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne spatium Medium aequale est alteri cuiuspiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

Vnde Medium describi sic poteris, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuiuspiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehensa aequale est, ita ut ipsum possit recta linea, quae Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duae lineae Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematibus ostendimus.

Theor. 20. Propof. 23.

Quo dà Media fit, ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media a , & b, c , Rationalis, Appliceturque ad b, c , Rationalem, rectangulum aequale quadrato ex Media a , descripto, sitque b, d , faciens latitudinem c, d . Dico c, d , esse Rationalem eique Rationali b, c , ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem.



Cum enim a , Media fit, poterit illa rectangulum contentum sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus, alias non recte dici posset Media. Sit igitur Medium illud re-

Rectangulum $e g$, contentum sub duabus $e f, f g$, Rationalibus solum potentia inter se commensurabilibus. Igitur cum ex constructione a , possit rectangulum $b d$, erunt $b d$, & $e g$, inter se aequalia, atque adeo & rectangula illa habebunt latera reciproca circa aequales angulos, nimirum erit ut latus $b c$, ad $e f$, ita latus $f g$, ad $c d$, ut constat ex 14. propos. lib. 6. Ac propterea ut quadratum ex $b c$, ad quadratum ex $e f$, ita quadratum ex $f g$, ad quadratum ex $c d$, ut docet 21. propos. lib. 6. Sunt enim quatuor lineae illae continue proportionales, nimirum $b c, e f, f g, c d$. Quadratum vero ex $b c$, commensurabile est quadrato ex $e f$, (cum ambae ex hypothesi sint Rationales atque adeo & commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum.) Igitur quadratum ex $f g$, quadrato ex $c d$, commensurabile erit, ut docet 10. propos. huius lib. recta quoque $f g$, & $c d$, commensurabiles erunt saltem potentia.

Quare cum $f g$, rationali $b c$, exposita sit commensurabilis, erit quoque $c d$, rationali exposita commensurabilis, ut Clavius docuit, in scholio 12. propos. lib. huius, ac propterea & $c d$, ex definitione Rationalis erit. Dico tamen eam esse longitudine incommensurabilem ipsi $b c$. Quoniam enim $e f, f g$, sunt Rationales potentia solum commensurabiles sitque ut $e f$, ad $f g$, ita quadratum ex $e f$, ad rectangulum $e g$, sub $e f, f g$, contentum ex lemmate 3. Clavij propos. 19. huius lib. erit quadratum ex $e f$, rectangulo ex $e g$, incommensurabile, atque adeo & rectangulo $b d$, huic aequale, ut vult 10. propos. lib. huius. Sed quadrato ex $c d$, commensurabile existit quadratum ex $e f$, (sunt enim ambae Rationales, atque saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum quadrata illa sint inter se commensurabilia, rectangulum vero $b d$, quadrato ex $e f$, incommensurabile sit, erunt incommensurabilia inter se quadratum ex $c d$, & rectangulum $b d$, ut constat ex 13. propos. lib. huius. At vero ex lemmate 3. Clavij propos. 19. huius lib. quadratum ex $c d$, sic se habet ad rectangulum $b d$, ut recta $c d$, ad rectam $b c$. Igitur rectae illae $c d$, & $b c$, sunt longitudine incommensurabiles. Rationalis est ergo $c d$, & Rationali $b c$, longitudine incommensurabilis.

Quare quod à Media, & c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad $b c$, rectangulum quadrato ex a , aequale, si ipsae $b c$, & a summae ^{11. sexti.} tertia proportionalis pro latere $c d$. Cum enim $b c, a$, & $c d$, proportionales sint; ^{17. sexti.} erit rectangulum $b d$, sub extremis $b c$, $c d$, contentum aequale quadrato mediae proportionalis a .

Hac arte utendum erit & in sequentibus quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum aequale quadrato cuiuspiam lineae rectae. Porro ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, aequale esse cuiusdam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur aequale Rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine linea Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio aequale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcumque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

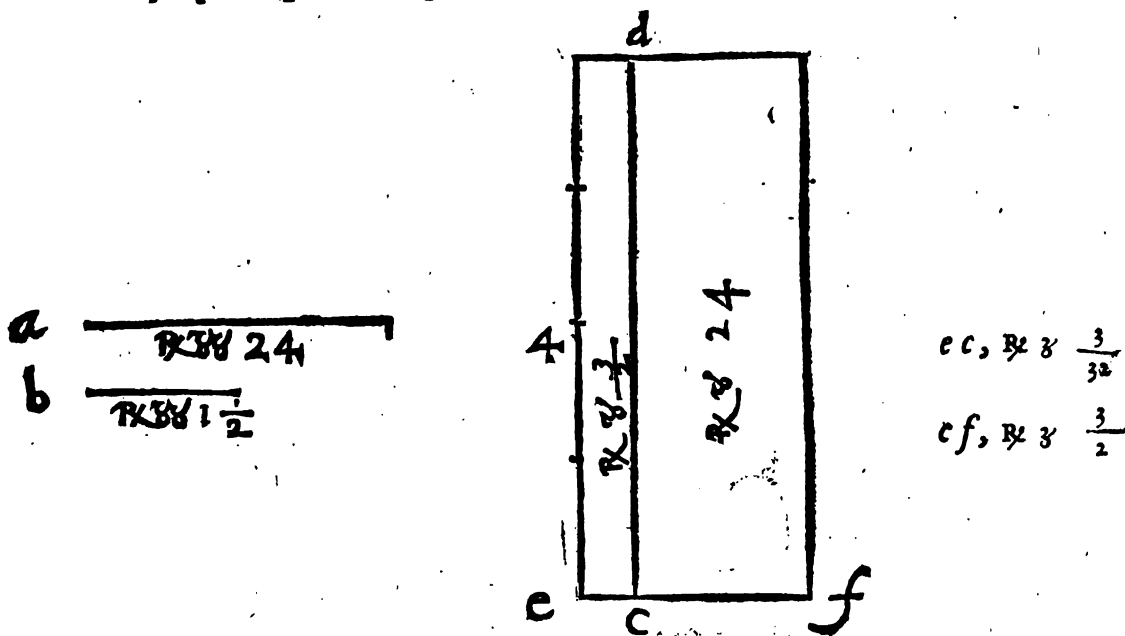
Theor. 21. Propos. 24.

MEDIAE commensurabilis, Media est.

SIT recta b , Mediae a , commensurabilis siue longitudine & potentia simul, siue potentia tantum, Dico b , Mediam esse.

$$\begin{array}{r} a \\ b \end{array} \quad \begin{array}{r} \hline \text{R} 38 \text{ } 24 \\ \hline \text{R} 38 \text{ } 12 \\ \hline \end{array}$$

EXPONATUR Rationalis $c d$, ad quam applicatum sit rectangulum aequale quadrato ex a , descripto, sitque rectangulum $d f$.



IGITUR cum rectangulum $d f$, quod est medium ad Rationalem sit applicatum, efficiet latitudinem rationalem nempe $e f$, ipsique Rationali longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propof. huius lib. Rursus ad Rationalem $c d$, applicetur rectangulum $d e$, aequale quadrato ex b .

Quoniam verò rectæ a , & b , ponuntur commensurabiles, erunt & earum quadrata, hoc est, rectangula illis æqualia $d f$, $d e$, commensurabilia. Atqui ex 1. sexti est, ut $d f$, ad $d e$, ita linea $f c$, ad $c e$. Rectangula autem illa sunt commensurabilia, Igitur & rectæ illæ commensurabiles, ut vult 10. propof. lib. huius.

Iam verò recta $f c$, Rationalis est ostensa, ipsique Rationali expofitæ $c d$, longitudine incommensurabilis: Igitur & $c e$, eidem $c d$, etiam longitudine incommensurabilis erit per 14. propof. huius lib.

Cum autem Rationalis sit, quia Rationali expofitæ $c d$, est commensurabilis (nam cum $f c$, $c e$, sint longitudine ostensa commensurabiles & $f c$, ipsi $c d$, saltem potentia commensurabilis, cum sit Rationalis, erit & $c e$, eidem $c d$, etiam saltem commensurabilis potentia, ut Clavius docuit in scholio propof. 12. huius lib.) erunt igitur $c d$, $c e$, Rationales potentia solum inter se commensurabiles, atque adeò recta b , potens spatium rectanguli $d e$, sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum, nimirum sub $c d$, $c e$, Media est, ut constat ex 22. propof. lib. huius.

Mediæ igitur commensurabilis, & c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM CLAVII.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstratum est $d f$, commensurabile esse Medio $d e$, ostensum ex eo mox fuit $d f$, esse quoque Medium nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus $c d$, $c e$, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Sit spatium $d f$, spatio Medio $d e$, commensurabile. Dico & $d f$, Medium esse. Possit enim a , Media ipsum $d f$, Medium (nam cum $d e$, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, ut in scholio propof. 22. huius lib. tradidimus) & b , ipsum $d e$; Quoniam igitur $d e$, $d f$, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex a , b , ipsis æqualia commensurabilia. Quare a , b , rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque

Atque idcirco existente a, Media, erit & b, illi commensurabilis, Media, ut in hoc theoremate ostensum est: Igitur & d f, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, ut in scholio propof. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEM ADMODVM autem in Lemmate primo propof. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Media longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò recta quedam linea Media potentia fuerit commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS Rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea a, cui si inueniantur dua rectæ commensurabiles b, c, illa quidem longitudine, hac verò potentia tantum; erit utraque b, c, Media a, commensurabilis, Media. Cum ergo a, b, sint longitudine commensurabiles; & a, c, potentia tantum; erunt inuenta a, b, Media longitudine commensurabiles; & a, c, Media potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.

$$\begin{array}{r} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{r} \overline{RXV 24} \\ \overline{RXV 1 \frac{1}{2}} \\ \overline{RXV 6} \end{array}$$

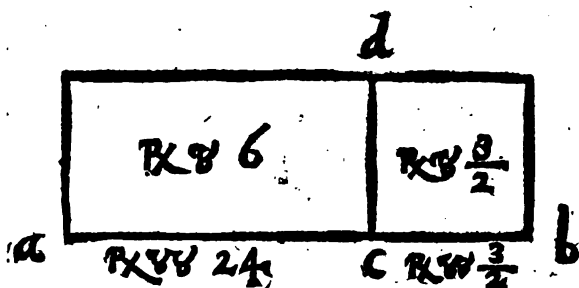
24. decimi.

SCHOLIUM CLAVII.

QVAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis, Media sit, non tamen omnis Media cuilibet Media est commensurabilis; cum dua Media dari possint prorsus incommensurabiles longitudine videlicet, & potentia, ut ex propof. 36. huius libri apparebit. Vbi etiam docebitur, quoniam inueniende sint dua Media longitudine, & potentia incommensurabiles.

Theor. 22. Propof. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.



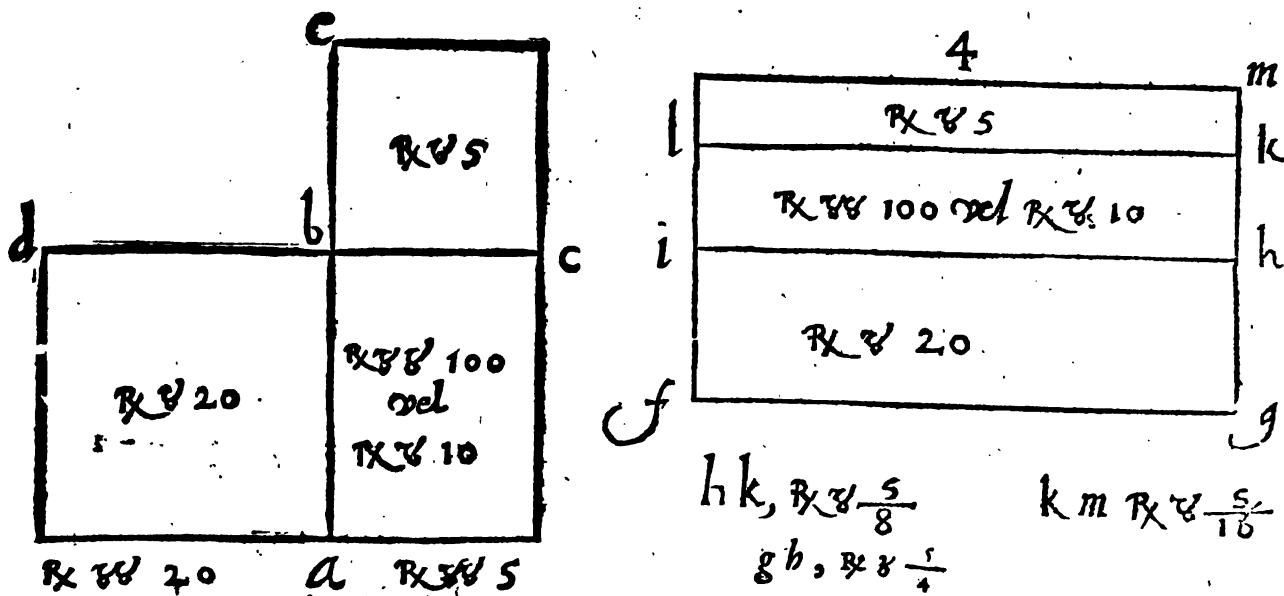
CONTINEATUR rectangulum a d, sub duabus Mediis longitudine inter se commensurabilibus. Dico rectangulum a d, esse Medium, describatur ex Media c d, quadratum b d, quod Medium erit. Hoc facto, cum sit per 1. propof. lib. 6. ut a c, ad c b, ita rectangulum a d, ad quadratum b d, Sint autem ex hypothesi Media a c, & d c, commensurabiles longitudine, Igitur & spatia a d, d b, commensurabilia erunt. Quare cum spatium a d, spatium d b, sit commensurabile, Medium erit a d, per ea, quæ tradita sunt à Clauio in coroll. propof. antecedentis.

Quod ergo sub Mediis, &c. Quod erat demonstrandum.

M

Theor. 23. Propos. 26

QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.



SIT rectangulum $a c$, contentum sub duabus Mediis $a b, b c$, quae tantum potentia sunt commensurabiles. Dico rectangulum $a c$, esse vel Rationale, vel Medium. Ex $a b, b c$, describantur quadrata $a d, c e$, quae Media erunt ex scholio Claviij propos. 22. lib. huius. Sunt enim ex hypothesi $a b, b c$, Media. Deinde exponatur Rationalis $f g$, ad quam applicetur rectangulum $f h$, quadrato $a d$, aequale ex Media $a b$, descripto, & ad $h i$, quae Rationali $f g$, aequalis est, aliud rectangulum sit applicatum aequale rectangulo $a c$, sitque illud $i k$: denique ad $l k$, quae etiam aequalis est Rationali proposita $f g$, aliud rectangulum applicetur aequale quadrato $c e$, sitque $l m$, erit ideo totum $f m$, unum rectangulum: ut docuit Clavius propos. 45. lib. 1. Quoniam vero quadrata $a d, c e$, Media sunt ostensa, erunt & rectangula $f h, l m$, illis aequalia, Media. Sunt autem Media illa ad Rationales $f g$, & $l k$ applicata, faciuntque latitudines $g h, k m$, Igitur erunt rectae $g h, k m$, Rationales ipsique Rationali $f g$, longitudine incommensurabiles, ut vult propos. 23. lib. huius. Quoniam vero ex hypothesi $a b, b c$, sunt commensurabiles potentia, erunt & earum quadrata commensurabilia, atque adeo & rectangula $f h, l m$, illis aequalia. Est autem per 1. sexti, ut $f h$, ad $l m$, sic recta $g h$, ad rectam $k m$. Quare recta $g h$, & $k m$, commensurabiles sunt. Iam etiam Rationales sunt ostensa $g h, k m$: Rationales igitur sunt & longitudine commensurabiles. Sed Rationali exposita $f g$, solum potentia commensurabiles, ac propterea rectangulum sub ipsis $g h, k m$, Rationale, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Quoniam vero est, ut $d b$, ad $b c$, ita $a b$, ad $b e$, (sunt enim $d b, b c$, ipsis $a b, b e$ aequales) & ut $d b$, ad $b c$, ita $a d$, ad $a c$, per 1. propos. lib. 6. & ut $a b$, ad $b e$, ita $a c$, ad $c e$, atque adeo $a d, a c, c e$, proportionalia erant, illisque aequalia rectangula $f h, h l, l m$, erunt quoque proportionalia. Eandem autem proportionem inter se habent rectae $g h, h k, k m$. quam rectangula $f h, h l, l m$, per 1. propos. lib. 6. Igitur rectae $g h, h k, k m$, proportionales sunt. Atque ideo rectangulum sub $g h$, & $k m$, quadrato ex $h k$ aequale per 17. propos. lib. 6. Sed rectangulum contentum sub illis duabus rectis $g h, k m$, ostensum est Rationale: Quare quadratum ex $h k$, descriptum erit Rationale. Ac propterea & recta $h k$, Rationalis, Rationalique $f g$, exposita vel longitu-

dine & potentia simul, vel potentia tantum commensurabilis ex 6. defin. lib. huius. Siquidem recta $h k$, recta $h i$, quae Rationali $f g$, est aequalis longitudine commensurabilis existit, rectangulum sub illis duabus contentum, erit Rationale per 20. lib. huius, atque adeo & rectangulum a c, illi aequale. Si verò recta $h k$, ipsi $h i$, potentia solum sit commensurabilis, erit rectangulum sub illis duabus contentum atque adeo & a c, huic aequale, Medium ex 22. propos. lib. huius. Est ergo rectangulum a c, sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quare quod sub Mediis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad $h i$, rectangulum ipsi a c, aequale, si tribus rectis $h i$, a b , b c, quae proportionalis sumatur pro latere $h k$. Nam rectangulum sub extremis $h i$, $h k$, aequale erit rectangulo sub Mediis a b, b c.

Hac eadem arte utemur in sequentibus quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum aequale alteri rectangulo.

Quoniam verò in hoc theoremate demonstratur rectangulum, contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 28. quinam ratione inveniendae sint duae Mediae potentia tantum commensurabiles, quae Rationale comprehendant. Propos. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquireret, quae spatium Medium contineant.

Itaque habemus ex his, ^a rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale; ^d Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum, esse Irrationale, appellarique Medium, & rectam quae ipsum potest, Medium. Rursus ex demonstratione constat, ^e rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine commensurabilibus, esse Medium, ^f Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum, esse vel Rationale, vel Medium. Quod si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine, & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe aequale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quae Media appellatur.

Sit enim rectangulum a c, comprehensum sub duabus Mediis a b, b c, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico a c, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, ut in theoremate, ostendimus similiter, rectas $g h$, $k m$, Rationales esse, & ipsi $f g$, longitudine incommensurabiles. Et quia recta a b, b c, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia, erunt & earum quadrata a d, c e, atque adeo ipsi aequalia rectangula $f h$, $l m$, incommensurabilia. ^a Ut autem $f h$, ad $l m$, ita est recta $g h$, ad rectam $k m$, ^b Igitur recta $g h$, $k m$, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare $g h$, $k m$, ostensa Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; ^c Ac propterea rectangulum sub ipsis $g h$, $k m$, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quae dicitur Media. ^d Potest autem rectangulum sub ipsis $g h$, $k m$, recta $h k$ (Nam ut prius ostendimus, tres $g h$, $b h$, $k m$, esse proportionales.) Igitur $h k$, Irrationalis est, & Media. Quare $i k$, Rationale non est, si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem $h i$, applicatum latitudinem $h k$, Rationalem, & ipsi $b i$, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum, ostensa enim est $h k$, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque $i k$, Medium est, si enim esset Medium ^e faceret ipsum applicatum ad Rationalem $h i$, latitudinem $h k$, Rationalem, & ipsi $b i$, longitudine incommensurabilem. Quod est absurdum, ostensa est enim $h k$, Irrationalis, & Media. Itaque cum $i k$, neque Rationale sit, neque Medium; necessarium neque a c, illi aequale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constitueret, nempe aequale erit ipsi $i k$, quod sub Rationali, & Media continetur, cum $h i$, Rationalis sit, & $h k$, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quae potest spatium sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur a b, b c, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quae Media vocatur, contentum. Quod est propos. sum.

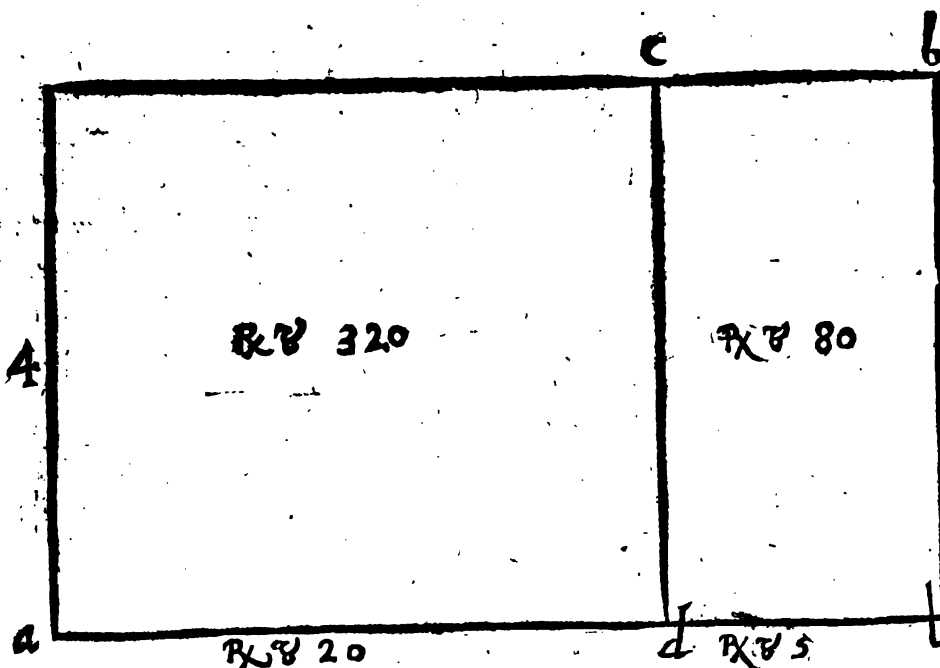
Theor. 24. Propos. 27.

MEDIUM non superat Medium Rationali.

SUPERET Medium a b, Medium a c, rectangulo d b, Dico d b, Medium esse, non Rationale. Quod si aliter contingere possit, sit rectangulum d b, Rationale: Exposita deinde sit Rationalis linea e f, & ad ipsam applicetur rectangulum e g, Medio a b, aequale, & medio a c, rectangulum e h, aequale; ita ut reliquum $h i$, Rationali d b, aequale existens, Rationale sit. Igitur cum rectangula e g, e h, quae Media sunt ad Rationalem sint applicata, efficiunt latitudines $f h$, $h g$, Rationales, ipsique Rationali expositae longitudine prorsus incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Cum autem Rationale $h i$, applicatum sit ad Rationalem e f, vel $h k$, quae illi est aequalis, erit recta $h g$, Rationalis eique Rationali longitudine commensurabilis per 21. propos. huius lib.

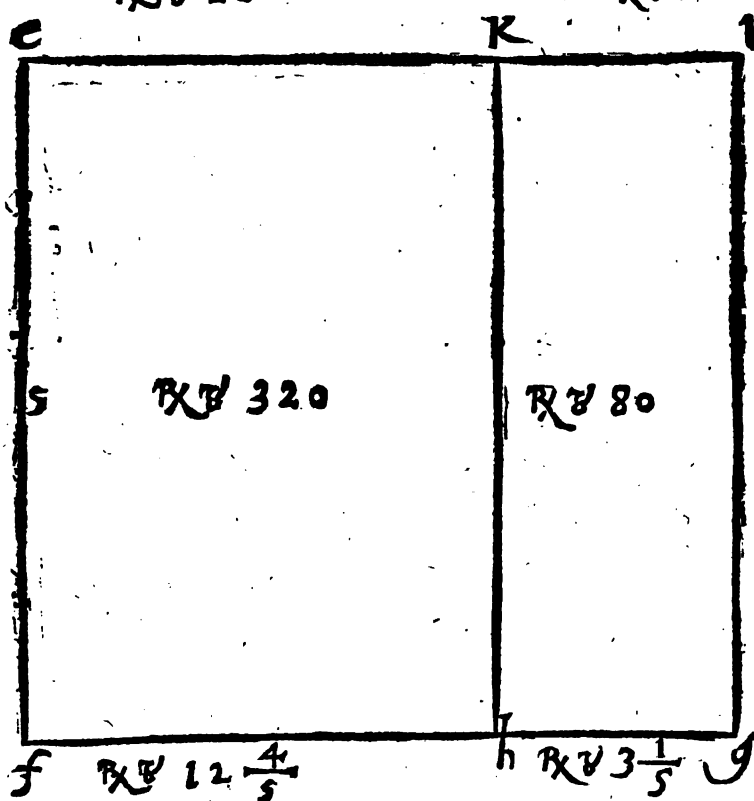
Rectangulum
a b, R² 8 720

Linea a l, R² 8 45



Rectangulum
e g, R² 8 720

linea f g, R² 8 28 $\frac{4}{5}$



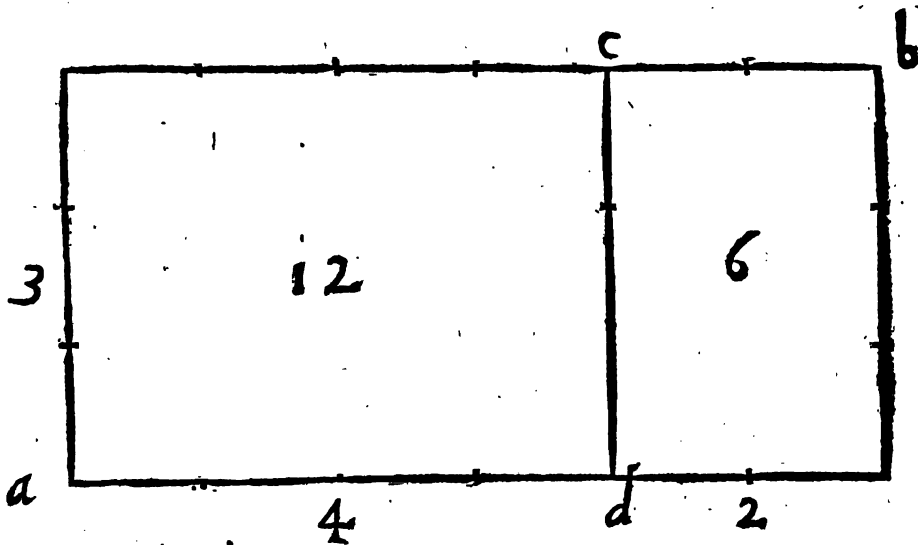
QVARE cum h g, & e f, sint longitudine commensurabiles e f, verò ipsi f h, longitudine incommensurabilis, ut iam fuit demonstratum erit & h g, eidem f h, longitudine incommensurabilis, ut constat ex 14. propos. huius lib. Est autem ut f h, ad h g, ita quadratum ex f h, ad rectangulum sub f h, h g, per 3. lemma Clavij propos. 19. huius lib. Quare quadratum ex f h, rectangulo sub f h, h g, contento erit incommensurabile. At quadrato f h, commensurabile est quadratum ex h g, (sunt enim ambo ex Rationalibus lineis descripta) atque adeò & quadrata ex f h, h g, simul quadrato ex f h, commensurabile, ut docet 16. propos. lib. huius, & rectangulo sub f h, h g, contento commensurabile est id quod bis sub f h, h g, continetur, cum hoc illius duplum existat, ergo per ea, quæ à Clavio tradita sunt in scholio propos. 14. huius lib. quadrata ex f h, h g, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub f h, h g, bis comprehenso, ex 17. decimi. Quo-

circa compositum ex rectarum quadratis $f h, h g$, & ex rectangulo bis sub $f h, h g$, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum $f h, h g$, Quadratus autem ex $f h, h g$, vnà cum rectangulo bis sub $f h, h g$, aequatur quadratum ex $f g$, vt constat ex 4. propos. lib. 2. Quare quadratum ex $f g$, composito ex rectarum quadratis $f h, h g$, incommensurabile est: Est autem compositum illud Rationale, per ea, quae lemmate 4. propositionis 19. huius lib. tradidit Clavius. Cum iam quadrato Rationali ex tota $f h$, descripto ostensum sit commensurabile. Igitur cum huic composito, quod Rationale existit, quadratum ex $f g$, incommensurabile sit, erit quadratum ex $f g$, Irrationale, vt vult 10. defin. lib. huius, atque adeo & recta $f g$, Irrationalis. Quod absurdum: Iam enim ostensa est Rationalis, ipsique $e f$, Rationali exposita longitudine tantum incommensurabilis. Quare rectangulum $d b$, quo Medium $a b$, Medium $a c$, superat non est Rationale. Igitur Medium non superat, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

[EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.



RATIONALE enim $a b$ superet Rationale $a c$, spatio $d b$, Dico $d b$, quoque esse Rationale. Quoniam enim $a b, a c$, Rationalia sunt; ^a erunt $a b, a c$, commensurabilia quadrato Rationalis exposita; ^b atque adeo & inter se commensurabilia. ^a 9. defin. Quare cum totum $a b$, compositum ex $a c, d b$, commensurabile sit ipsi $a c$, erit quoque idem $a b$, reliquo $d b$, commensurabile, ex ^b 12. decimi. coroll. propos. 16. huius lib. Est autem $a b$, Rationale. Igitur & $d b$, ex lemmate 4. propos. 19. huius libri Rationale est. Quod est propositum.

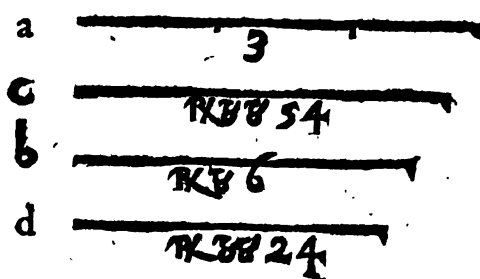
Probl. 4. Propos. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

SVMANTVR per ea, quae Clavius tradidit lemmate 2. propos. 21. lib. huius, duæ rectæ Rationales, quæ tantum inter se sint commensurabiles potentia, sintque illæ a , & b , inter quas sumatur media proportionalis c , fiatque vt a , ad b , ita c , ad d . Dico c , & d , esse Medias, quæ tantum potentia commensurantur, & quæ Rationale comprehendunt. Nam cum a , & b , ex hypothesi Rationales sint, & solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur, per 22. propos. huius lib. atque adeo cum recta c ,

N

possit rectangulum illud erit c , Media: Sed quoniam est ut a , ad b , ita c , ad d , cum quatuor illae sint continue proportionales ex constructione, sintque a , & b , solum commensurabiles potentia, erunt & c , & d , etiam potentia tantum commensurabiles ut demonstravit Clavius in scholio

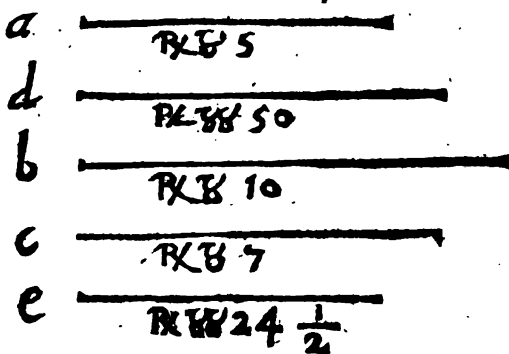


propof. 10. lib. huius. Quare & d , ipsi Media c , commensurabilis, Media est ex 24. propof. huius lib. Inuenta sunt igitur duae Media, quae tantum potentia commensurari possunt. Dico & eas Rationale continere. Quoniam enim est, ut a , ad b , ita c , ad d , & permutando ut a , ad c , ita b , ad d , ut autem a , ad c , ita c , ad b , erit quoque ut c , ad b , ita b , ad d , Ideoque b , est Media proportionalis inter c , & d , poteritque rectangulum sub illis contentum, per 17. propof. lib. 6. Sed quadratum ex b , linea, quae per hypothesin Rationalis est, Rationale existit. Igitur rectangulum sub c , & d , contentum huic quadrato aequale, Rationale est. Quare Medias inuenimus nimirum c , & d , potentia solum commensurabiles, quae Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

Probl. 5. Propof. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles quae Medium continent.

SUMANTVR per ea, quae Clavius tradidit in scholio propof. 21. lib. huius, tres Rationales nimirum a , b , c , quae sint inter se commensurabiles potentia: Deinde inter a , & b , media proportionalis d , inueniatur. Postremo fiat ut b , ad c , ita d , ad e , Dico d , & e , Medias esse potentia solum commensurabiles, Mediumque continentes. Nam cum a , & b , ex hypothesi sint Rationales, & commensurabiles tantum potentia, erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale & Medium, quadratumque ex Media d , illi aequale, Medium, ut vult 22. propof. lib. huius.



QUONIAM verò est ut b , ad c , ita d , ad e , sunt autem b , & c , Rationales, & tantum inter se potentia commensurabiles, erunt quoque d , & e , potentia solum commensurabiles, ut in

scholio propof. 10. lib. huius Clavius docuit. Cum autem d, Media fit, erit & e, illi commensurabilis potentia, Media, per 24. propof. huius lib. atque adeo d, & e, Media, sunt commensurabiles tantum potentia. Iam dico eas Medium continere. Cum enim ex constructione fit ut b, ad c, ita d, ad e, permutandoque ut b, ad d, ita c, ad e, ut autem b, ad d, ita d, ad a, erit quoque ut d, ad a, ita c, ad e, atqui rectangulum sub d, & e, aequale est rectangulo contento sub a, & c, per 16. propof. lib. 6. Sed quod sub a, & c, continetur rectangulum, est Irrationale & Medium ex 22. propof. lib. huius. Igitur & rectangulum sub d, & e, illi aequale, Medium. Medias igitur inuenimus nimirum d, & e, potentia commensurabiles Medium comprehendentes. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM I. EX CLAVIO.

IN iis quae sequuntur indigemus hoc Problemate.

D V O S numeros planos similes inuenire.

SUMANTVR quatuor quicumque numeri proportionales a, b, c, d, ut quidem a, ad c, ita b, ad d, Multiplicantes autem se mutuo a, & b, faciant e, Item c, & d, se multiplicantes faciant f. Erunt ergo e, & f, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, ut ex constructione est manifestum.

$$\begin{array}{ll} a, 6 & c, 12 \\ b, 4 & d, 8 \\ & e, 24 \quad f, 96 \end{array}$$

Quoniam autem in lib. 9. a ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem a 28. & 29. vero, si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quoniam modo inueniri possint duo plani similes, quorum uterque par sit, vel noni. impar; vel unus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si unus latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat unum laterum numerum parem, alterum vero imparem, & c.

LEMMA I. EX CLAVIO.

D V O S numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam fit.

INVENIANTVR per ea, quae in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes. a b, & c, quorum uterque vel par sit, vel impar. b Et quoniam siue a pari par auferatur siue ab impari impar, reliquus par est; detracto b d, ex a b, qui equalis sit ipsi c, erit reliquus a d, par. Quo diuiso bifariam in noni.

$$\begin{array}{l} a \dots e \dots d, \dots b \\ c \dots \end{array}$$

e; Dico numerum factum ex a b, in b d, qui quidem quadratus est, c i. noni. compositum cum quadrato numeri e d, facere quadratum.

Quoniam enim numerus a d, bifariam est diuisus in e, & ei additus d b, erit ex 6. theoremate eorum, quae ad propof. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato numeri d e, equalis quadrato numeri e b, Quare duo quadrati, nempe qui fit ex a b, in b d, & quadratus numeri d e, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex b e, gignitur. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, quando a b, & c, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum b e, c d, quorum excessus, nimirum numerus ex a b, in b d, factus, etiam numerus quadratus fit.

Quod si numeri sumantur a b, & c, non similes, uterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum b e, c d, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex a b, in b d, non est quadratus. Si enim quadratus esset, d numeri a b, b d, hoc est a b, & c, plani similes essent. Quod est absurdum ponuntur enim non similes. 2. noni.

SCHOLIUM II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, vel impar sit, nempe a b, & c; & reliqua perficiemus, ut in proximo lemmate

a e d b
c

Si verò inveniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: Sumendi erunt duo numeri plani a b, & c, non si-

a e d b
c

milis, quorum uterque par sit vel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex b e, aequalem esse quadrato ex d e, una cum eo, qui ex a b, in b d, fit: Quare excessus quadratorum ex b e, & d e, est numerus factus ex a b, in b d, qui cum non sit quadratus, (si enim esset quadratus, essent a b, b d, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absolvemus, si quemcunque quadratum numerum dividamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter verò non. Ut si quadratus 36. dividatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. dividatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes a b, & c, pares, vel impares, ut in lemmate precedenti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus qua-

a h i e f g d b
c

dratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum a b, d b, inter se, una cum quadrato ex d e, aequalis

fit quadrato ex b e, Auferatur deinde ex d e, unitas e f, Erit ergo quadratus ex d f, minor quadrato ex d e, quod & latus d f, latere d e, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex a b, in b d, alter verò ex d f, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex b f, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex b f, ac propterea latus ipsius maius latere b f. Erit ergo latus ipsius vel aequale numero b e, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros b e, b f, sola unitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne unitas ipsa secetur: Esset autem dictum latus inter ipsos medium si maius poneretur, quam b f, minus verò quam b e.) Si dicatur aequale, ita ut quadrato ex b e, aequalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex a b, in b d, & ex quadrato numeri d f, cum eidem quadrato ex b e, sit ostensus in precedenti lemmate aequalis numerus, qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, erit, qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d f, aequalis ei, qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex a b, in b d, erit reliquus quadratus ex d f, aequalis reliquo quadrato ex d e, Ideoque & latus d f, latere d e, aequale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex a b, in b d, alter verò ex d f, in se fit, aequale est numero b e, Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequale numero b i, qui maior sit, quam b e, ita ut quadrato ex b i, aequalis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex b i, latere maiore, maior est quadrato ex b e, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex a b, in b d, alter verò ex d f, in se fit. (cum hic compositus aequalis ponatur quadrato ex b i) maior quadrato ex b e, Est autem quadrato ex b e, ostensus in lemmate precedentis aequalis numerus, qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, Ablato ergo communi, qui fit ex a b, in b d, erit reliquus quadratus ex d f, reliquo quadrato ex d e, maior; ac proinde latus d f, latere d e, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex a b, in b d, alter verò ex d f, in se, maius est latere b e. Sed neque aequale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex b f.

Sit iam, si fieri potest, numerus qui fit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d f, aequalis quadrato ex b f, & ponatur numerus a h, duplus unitatis e f, Quia igitur totus a d, totius e d, duplus est, (diuisus enim est a d, in e, bifariam) & ablatas a h, ablata unitatis e f, erit & reliquus h d, reliqui f d, duplus, ex iis, quae ad propof. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco h d, in f, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theoremate eorum, quae ad propof. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex h b, in b d, una cum

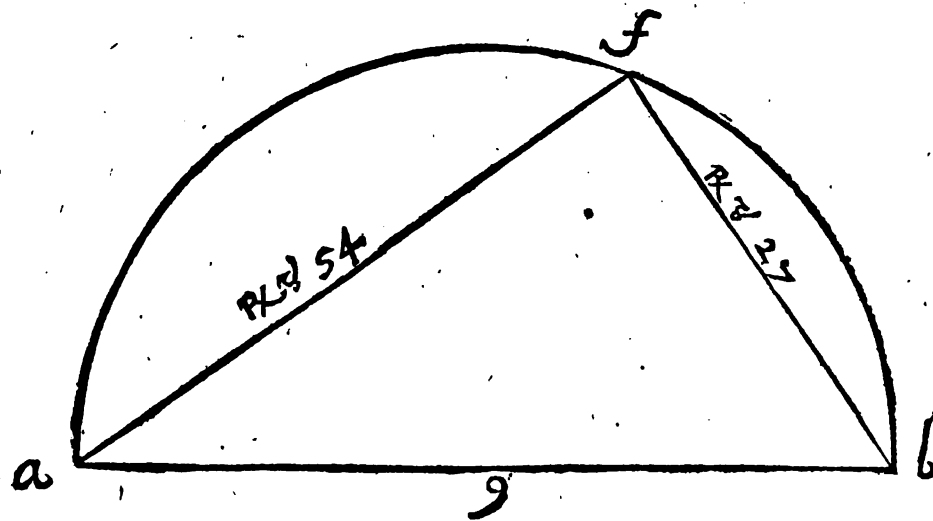
dita fuere in scholio 2. antecedentis propof. duo numeri quadrati nimirum $c d, c e$, quorum excessus $d e$, quadratus non fit. Deinde per coroll. Clauij propof. 6. lib. huius, fiat ut $c d$, numerus ad numerum $d e$, Ita quadratum ex $a b$, ad aliud quadratum nimirum ad id quod ex $a f$. Accommodeturque $a f$, in semicirculo $a b f$, circa diametrum $a b$, descripto, ac denique recta $f b$, connectatur. Igitur cum angulus f , in semicirculo sit rectus erit quadratum $a b$, aequale quadratis ex $a f, f b$, descriptis per 47. lib. 1. ac propterea recta $a b$, plus potest, quam $a f$, quadrato recte $f b$. Quoniam verò quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $a f$, est ut numerus $c d$, ad numerum $d e$, erunt quadrata ex $a b, a f$, descripta, commensurabilia, ut constat ex 6. propof. lib. huius, quadratumque ex $a f$, Rationale erit, cum quadratum ex $a b$, linea Rationali descriptum, Rationale sit, ac proinde recta $a f$, Rationalis, Rationales sunt igitur $a b, a f$, & saltem potentia commensurabiles. Quoniam enim quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $a f$, non habet rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum (cum neque quadratus numerus $c d$, ad $d e$, non quadratum eam rationem possit habere, aliàs & $d e$, quadratus existeret, quod non ponitur) erunt ex 9. propof. lib. huius recte $a b, a f$, incommensurabiles longitudine: Sunt autem commensurabiles potentia. Igitur $a b, a f$, Rationales sunt, & solum inter se potentia commensurantur.

Nunc autem cum sit ut $c d$, ad $d e$, ita quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $a f$, erit per conuersionem rationis ut $c d$, ad $c e$, ita quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $f b$, (Superatur enim quadratum $a f$, à quadrato $a b$, quadrato $f b$, eodem excessu, nimirum quo numerus $d e$, à numero $d c$, superatur, id est, numero $c e$.) recte igitur $a b, f b$, sunt longitudine commensurabiles. Igitur inuenta sunt due Rationales, & c. Quod erat faciendum.

Probl. 7. Propof. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato recte lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATUR Rationalis linea $a b$, inuenianturque ex lemmate 2. Clauij propof. 29. huius lib. duo numeri quadrati $c e, c d$, ita ut compositus ex illis $c d$, non sit quadratus, vel



$c, 144. e, 16. d$

$c, 160. d.$

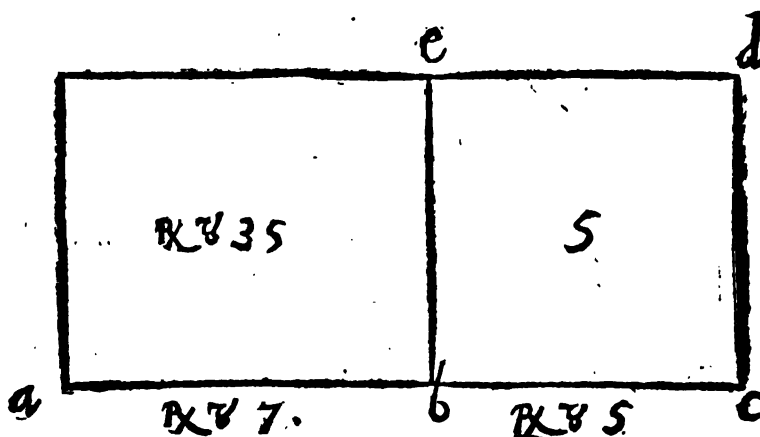
$c \dots \dots e \dots d.$

numerus aliquis quadratus secetur in duos numeros non quadratos c, e, e, d , utrumvis enim horum fiat, totus c, d , ad neutrum ipsorum proportionem habebit, quam numeri quadrati habent inter se, aliàs esset totus c, d , etiam quadratus secundum priorem modum datum hoc lemme Clavi. At secundum posteriorem, quilibet ipsorum esset etiam quadratus, ut vult 24. propos. lib. 8. Deinde ut in coroll. propos. 6. lib. huius Clavius docuit fiat ut c, e , ad e, d ; ita quadratum ex a, b , ad quadratum ex a, f , Accommodeturque a, f , in semicirculo a, f, b , circa diametrum a, b , descripto. Denique connectatur recta f, b , poterit igitur ut in antecedenti demonstratione fuit ostensum quadratum a, b , plus, quam quadratum a, f , quadrato recte f, b , eruntque a, b, a, f . Rationales, & solum commensurabiles potentia, sunt enim media demonstrationum eadem. Rursus cum per conuersionem rationis sit, ut c, d , ad e, d , ita quadratum ex a, b , ad id quod ex f, b , Non habent autem numeri c, d, e, d , rationem quadratorum, non habebunt quoque quadrata ex a, b, f, b , descripta, rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum. Igitur per 9. propos. lib. huius a, b, f, b , incommensurabiles sunt longitudine.

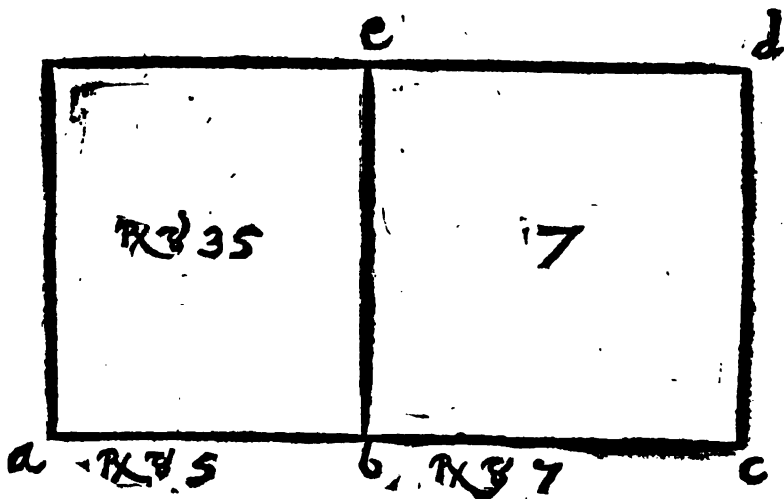
Inuenimus igitur duas Rationales, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA EX CLAVIO.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales a, b, b, c , in rectum constitutæ, quarum a, b , maior sit. Dico esse ut a, b , ad b, c , ita rectangulum sub a, b, b, c , ad quadratum ex b, c . Describatur enim ex b, c , quadratum b, d , compleaturque rectangulum a, d , eritque rectangulum a, e , sub a, b, b, c , contentum; quod b, c , ipsi b, c , sit æqualis; perspicuum autem est, esse ut a, b , ad b, c , ita a, e , ad b, d .

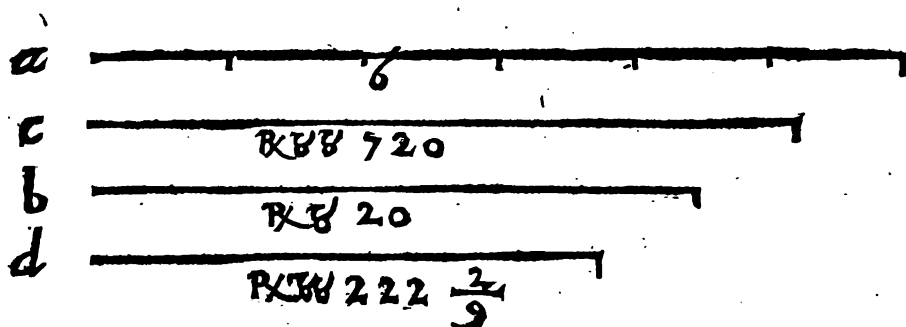


Eodem modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua a b , minor est quàm b c .

Probl. 8. Propos. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SUMANTUR duæ Rationales a b , quæ tantum sint potentia commensurabiles, ita ut maior illarum plus possit, quàm minor quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, sitque c , media proportionalis inter a , & b , deinde fiat ut a , ad b , ita c , media ad d , Igitur cum a , & b , sint Rationales, solumque potentia commensurabiles: erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium; ut vult 22. propos. lib. huius, rectæque, quæ illud poterit Media.



QUONIAM verò est ut a , ad b , ita c , ad d , sunt autem a , & b , commensurabiles potentia, erunt & c , d , etiam tantum potentia commensurabiles, ut docuit Clavius scholio propos. 10. lib. huius: Quare cum d , Media c , sit commensurabilis, erit & d , Media, ut patet ex 24. propos. huius lib. Inventa sunt igitur duæ Media c , & d , solum potentia commensurabiles. Dico & eas Rationale comprehendere. Nam cum sit ut a , ad b , ita c , ad d , permutandoque, ut a , ad c , ita b , ad d , Sit autem ut a , ad c , ita c , ad b , erit quoque, ut c , ad b , ita b , ad d , Atque adeo rectangulum sub c , & d , contentum, æquale erit quadrato ex b , descripto, ex 17. propos. lib. 6. Sed quadratum ex b Rationali, Rationale est. Igitur & rectangulum sub c , & d , illi æquale, Rationale est. Igitur Media c , d , Rationale continent. Quoniam verò est ut a , ad b , ita c , ad d , potest autem a , plus, quàm b , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, Igitur & c , plus, quàm d , poterit quadrato etiam rectæ sibi longitudine commensurabilis, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Invenimus ergo duas Medias, & c. Quod erat faciendum.

Si verò reperta sint duæ Rationales a , & b , potentia solum commensurabiles, quarum maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, & reliqua perficiantur ut prius, ostendemus eodem modo inventas esse duas Medias potentia commensurabiles, quæ Rationale continent, quarum maior plus poterit, quàm minor, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

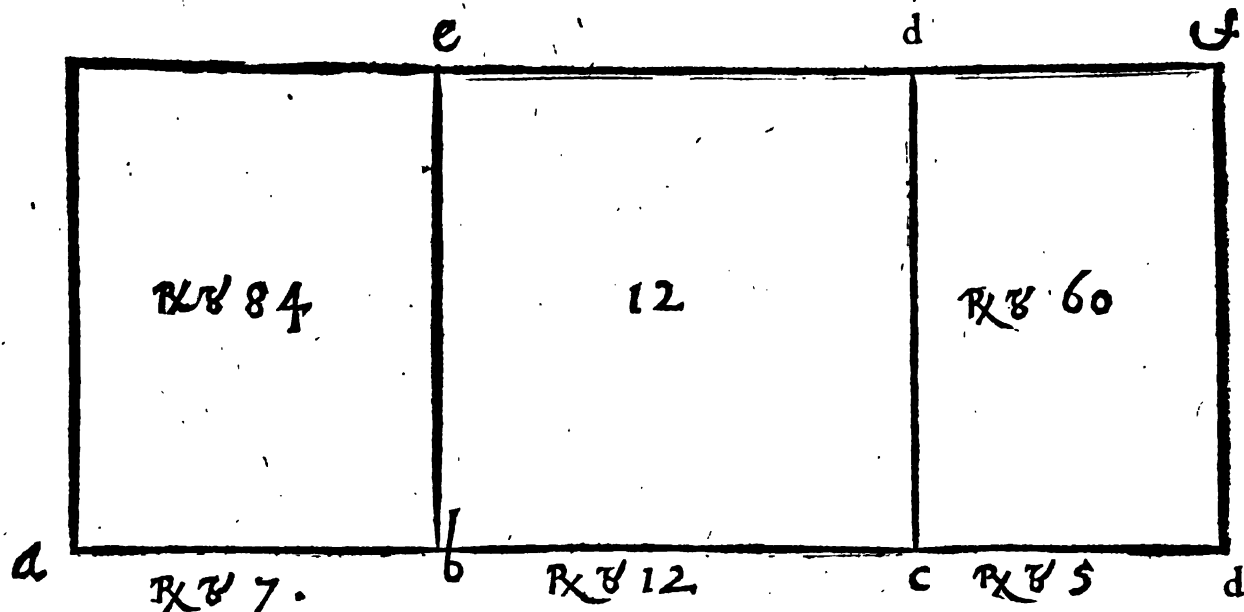
ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius, ac facilius idem sine ipso ostendimus, ut facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas c , d , Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propositione 28. huius libri,

LEMMA

LEMMA EX CLAVIO.

Si sint tres lineæ rectæ,erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima, & secunda contentum,ad id,quod sub secunda,& tertia continetur.

SINT tres rectæ a b,b c,c d,in rectum constitutæ.Dico esse vt a b,ad c d, ita rectangulum sub a b, b c,ad rectangulum sub b c,c d,Describatur enim ex b c,quadratum b c d e, perficiaturque rectangu-

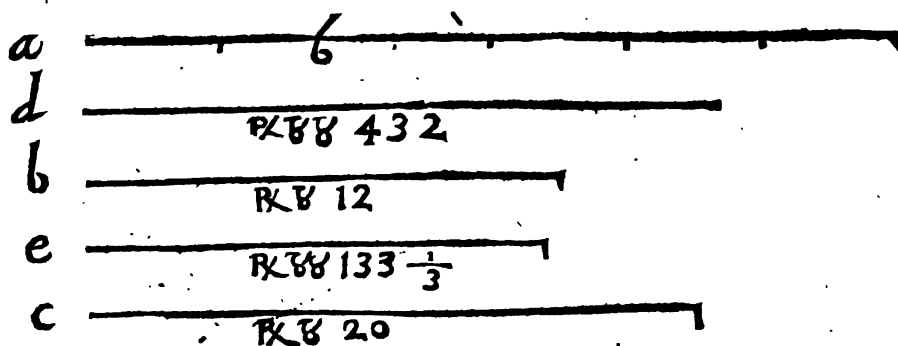


lum a f,Erítque a e,contentum sub a b,b c;& c f,sub b c,c d; quod b c,c d,ipsi b c,æquales sint. Per. 1. sexti. spicuum autem est esse a b,ad c d,vt a e, ad c f. Quod est propositum.

Probl. 9. Propos. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit,quàm minor,quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

REPERIANTVR tres Rationales a,b,c,solùm potentia commensurabiles, ita vt a, plus possit,quàm c,quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ipsarumque a,& b,sumatur media proportionalis d,Deinde fiat vt d,ad b, ita c, ad e, Igitur cum ex lemmate Clauj



propos. antecedentis sit, vt a, ad c, ita rectangulum sub a, b, ad rectangulum sub b, c, sit autem rectangulum ex a, b, æquale quadrato ex d, per 17. propos. lib. 6. & rectangulo sub b, c, æquale est rectangulum sub d, e, ex 16. propos. 6. quod quatuor illæ, nimirum d, b, c, e, sint proportionales,

P

erit ut a , ad c , ita quadratum ex d , ad rectangulum sub d , e , ut autem quadratum ex d , ad rectangulum sub d , e , ita ex lemmate 3. Clavij propos. 19. lib. huius recta d , est ad rectam e . Quare erit ut a , ad c , ita d , ad e , sunt autem a , c , potentia solum commensurabiles, Igitur et d , e , solum commensurabiles erunt potentia, ut demonstravit Clavius scholio propos. 10. lib. huius. Cum autem d , potens spatium contentum sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus, sit Irrationalis, ex 22. propos. lib. huius et Media, erit et e , illi commensurabilis, Media, ex 24. propos. huius lib. Igitur inuenta sunt duae Mediae d , et e , solum potentia inter se commensurabiles. Dico et eas Medium continere. Nam cum rectangulum sub b , c , sit Medium, (continetur enim sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus) illique sit aequale rectangulum contentum sub d , e , erit Rectangulum sub d , e , Medium. Denique quia iam fuit ostensum esse ut a , ad c , ita d , ad e , possit autem a , plus, quam c , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, poterit et d , plus, quam e , quadrato etiam rectae sibi longitudine commensurabilis. Inuenta sunt igitur duae Mediae, quae, et c. Quod erat faciendum.

Si vero fuissent repertae a , b , c , potentia solum commensurabiles, ita ut maior a , plus possit, quam c , quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, reliqua autem perficerentur ut prius, facile erit demonstrare inventas esse duas Medias, Medium comprehendentes, quarum maior d , plus potest, quam minor e , quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine. Quod est propositum.

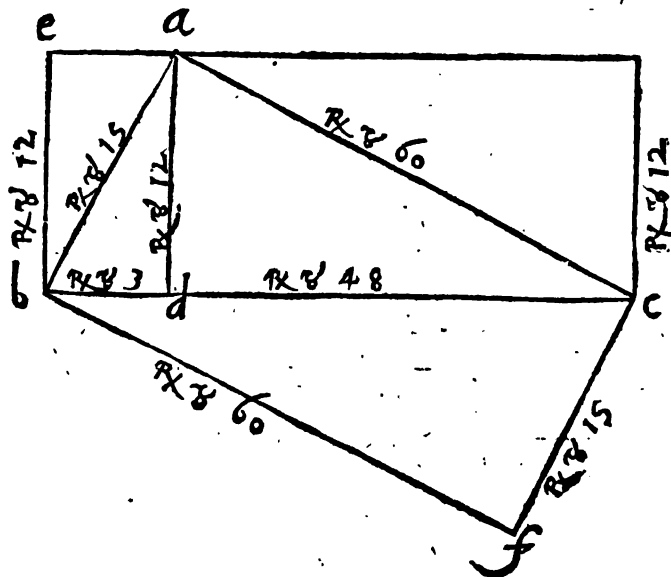
LEMMA I. EX CLAVIO.

SIT triangulum rectangulum $a b c$, angulum rectum habens $b a c$, à quo perpendicularis demittatur $a d$. Dico rectangulum contentum sub $c b$, $b d$, æquale esse quadrato ex $a b$: contentum autem sub $b c$, $c d$, æquale quadrato ex $a c$, & contentum sub $b d$, $d c$, æquale quadrato ex $a d$; Contentum denique sub $b c$, $a d$, æquale contento sub $a b$, $a c$.

17. sexti.

QUONIAM ex corollario propos. 8. lib. 6. recta $a b$, media proportionalis est inter $c b$, $b d$; erit rectangulum sub $c b$, $b d$, quadrato ex $a b$, æquale.

Eadem ratione erit rectangulum sub $b c$, $c d$, æquale quadrato ex $a c$, quoniam per idem corollarium $a c$, media proportionalis est inter $b c$, $c d$.



linea $b c$, R 60.

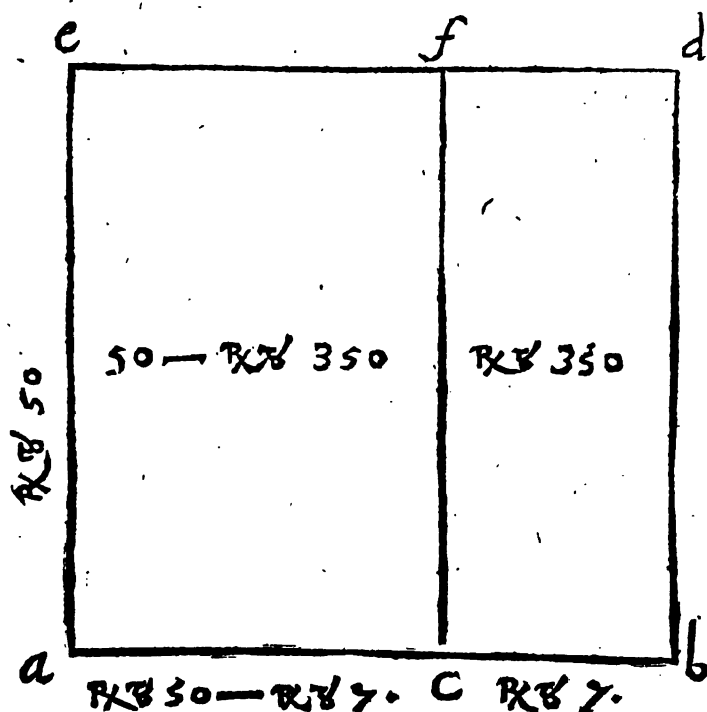
RV RSVS quia ex eodem coroll. $a d$, inter $b d$, $d c$, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub $b d$, $d c$, æquale quadrato ex $a d$.

Postremo^a quia triangula $a b c$, $a b d$, similia sunt, erit ut $b c$, ad $a c$, ita $a b$, ad $a d$; Quare re-^{8. sexti.}
ctangulum sub $b c$, $a d$, aequale est re^{16. sexti.}ctangulo sub $a b$, $a c$. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur re-
ctangulum $c e$, contentum sub $b c$, $a d$: Item re^{41. primi.}ctangulum $a f$, sub $a b$, $a c$, contentum. Quoniam igitur
re^actangulum $c e$, duplum est trianguli $a b c$, nec non & re^actangulum $a f$, eiusdem trianguli est duplum,
erunt inter se equalia re^actangula $c e$, $a f$, Quod est propositum.

LEMMA II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita re^actan-
gulum sub tota, & maiore parte, ad re^actangulum sub tota, & minore parte contentum.

SECETVR recta $a b$, non bifariam in c , sitque maior pars $a c$, Dico esse ut $a c$, ad $c b$, ita re^actan-
gulum sub $a b$, $a c$, ad re^actangulum sub $a b$, $c b$, Describatur enim ipsius $a b$, quadratum $a b d e$, ducaturque $c f$, ipsi $a c$ parallela, eritque $a f$, contentum sub $a b$, $a c$, & $c d$, contentum sub $a b$, $c b$, quod $a c$,
 $c b$, ipsi $a b$, equalis sint.^a Quoniam igitur est ut $a c$, ad $c b$, ita $a f$, ad $c d$, Constat propositum. ^{1. sexti.}



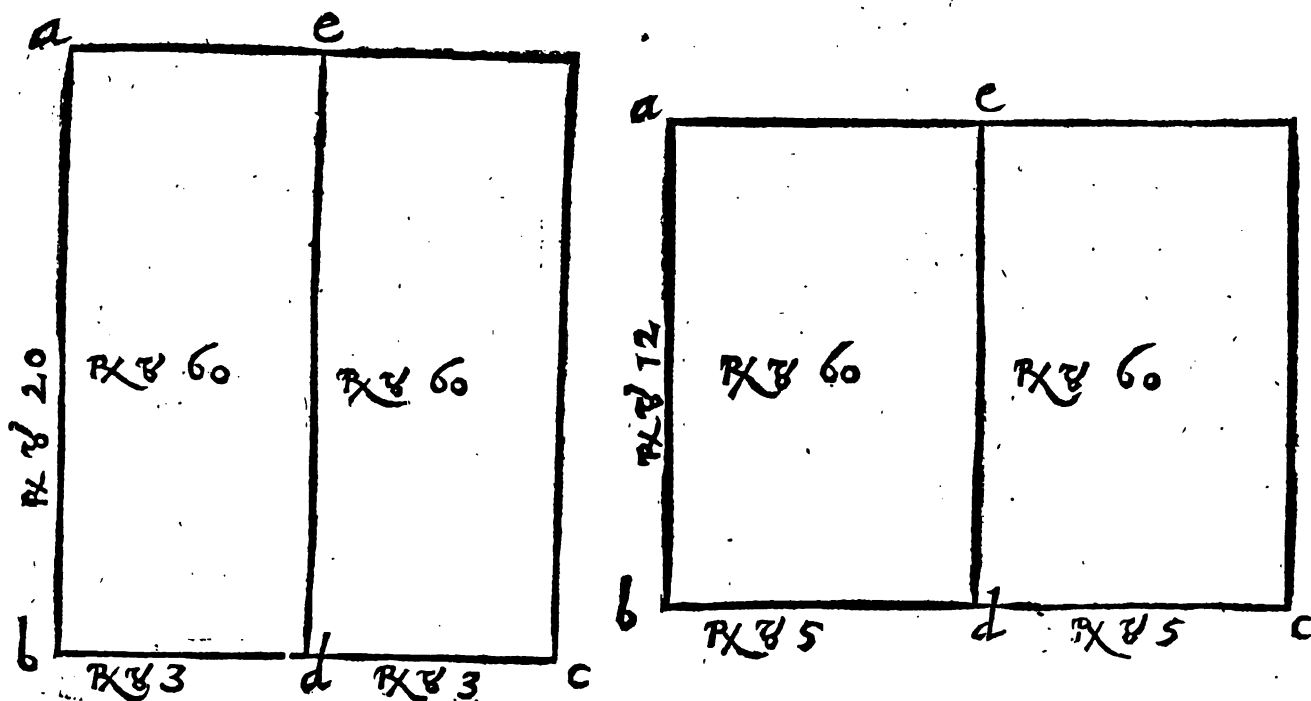
$a b$, $R \times 50$.
 $c b$, $R \times 7$.
Quadratum $a d$, 50.

EADEM ratione erit, ut minor pars $b c$, ad maiorem $a c$, ita $b f$, contentum sub $a b$, $b c$, tota, &
minore parte, ad $c e$, contentum sub $a b$, $a c$, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit re^actangulum sub
ipsis contentum duplum re^actanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris conti-
netur:

SINT dua recta inaequales a, b, c , angulum rectum constituentes a, b, c , seceturque minor b, c , bifariam in d , Dico rectangulum sub a, b, c , duplum esse rectanguli sub a, b, d , Complentur enim rectan-



1. sexti.

gulum a, c , sub a, b, c , ducaturque d, e , ipsi a, b , parallela, eritque b, e , contentum sub a, b, c , & b, d , dimidia minoris. Quoniam igitur a, c , ipsius b, e , duplum est, quod & basis b, c , dupla sit basis b, d , constat propositum.

Eodem modo, si b, c , secta bifariam, sit maior, erit quod sub a, b, c , continetur, duplum eius, quod continetur sub a, b , minore & b, d , dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.

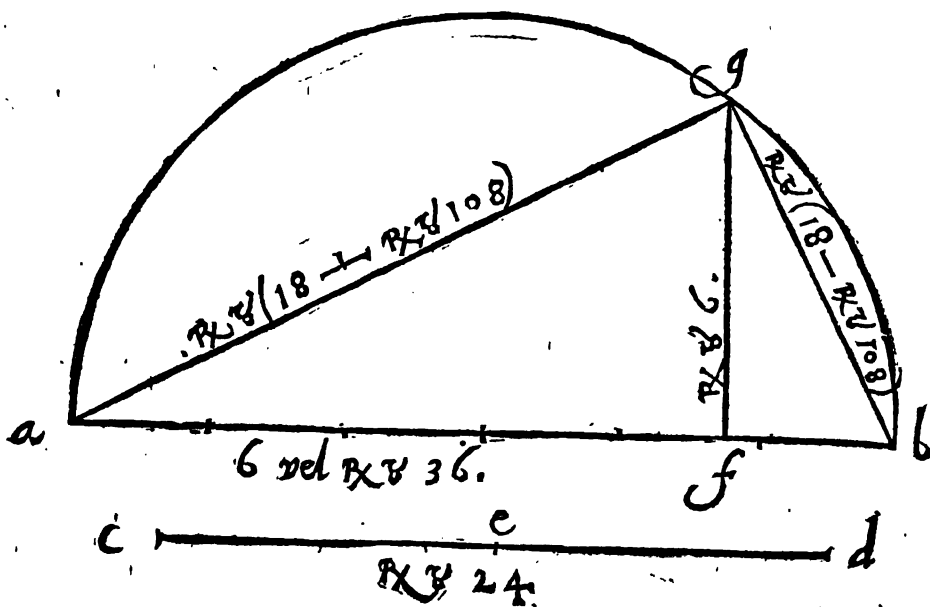
Probl. 10. Propos. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum Medium.

INVENIANTUR dua Rationales a, b, c, d , quarum maior a, b , plus possit, quam minor c, d , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque minor c, d , bifariam secta in puncto e . Deinde per lemma 2. Clauj propof. 17. huius lib. Applicetur ad a, b , rectangulum æquale quadrato dimidij minoris lineæ, deficiensque figura quadrata, sitque quod sub a, f, f, b , continetur. Postremò descripto semicirculo circa diametrum a, b , erigatur f, g , ad diametrum a, b , perpendicularis, sintque a, g, g, b , connectæ in puncto g . Quoniam recta a, b , plus potest, quam c, d , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque ad a, b , applicatum rectangulum æquale quadrato dimidij minoris c, d , deficiens figura quadrata, erunt partes a, f, f, b , inter se longitudine incommensurabiles, per 19. propof. lib. huius. Est autem, ut a, f , ad f, b , ita per lemma 2. Clauj propof. antecedentis, rectangulum sub a, b, a, f , ad rectangulum sub a, b, f, b , Sed rectangulum sub a, b, a, f , quadrato ex a, g , est æquale, & rectangulum sub a, b, f, b , quadrato ex g, b , etiam est æquale ex lemmate 1. Clauj propof. antecedentis. Quare erit ut a, f , ad f, b , ita quadratum ex a, g , ad quadratum ex g, b , Ac proinde cum a, f, f, b , sint longitudine incommensurabiles ostensa, erunt & quadrata ex a, g, g, b , incommensurabilia, ut vult 10. propof. huius lib. Re-

ELEMENTVM DECIMVM.

Et quoque a g, g b, potētia inter se incommensurabiles, ex 4. definitione lib. huius. Quonia quadratum ex a b, Rationali, Rationale est, sitque quadratum illud aequale quadratis e g b, per 47. lib. 1. Erit & compositum ex rectorum quadratis a g, g b, Rationale. Deinc



Tota superficies contenta sub linea
composita ex a g, g b, faciet.
36 + 364.

c e 36.
a f, 3 + 3.
f b 3 — 3.

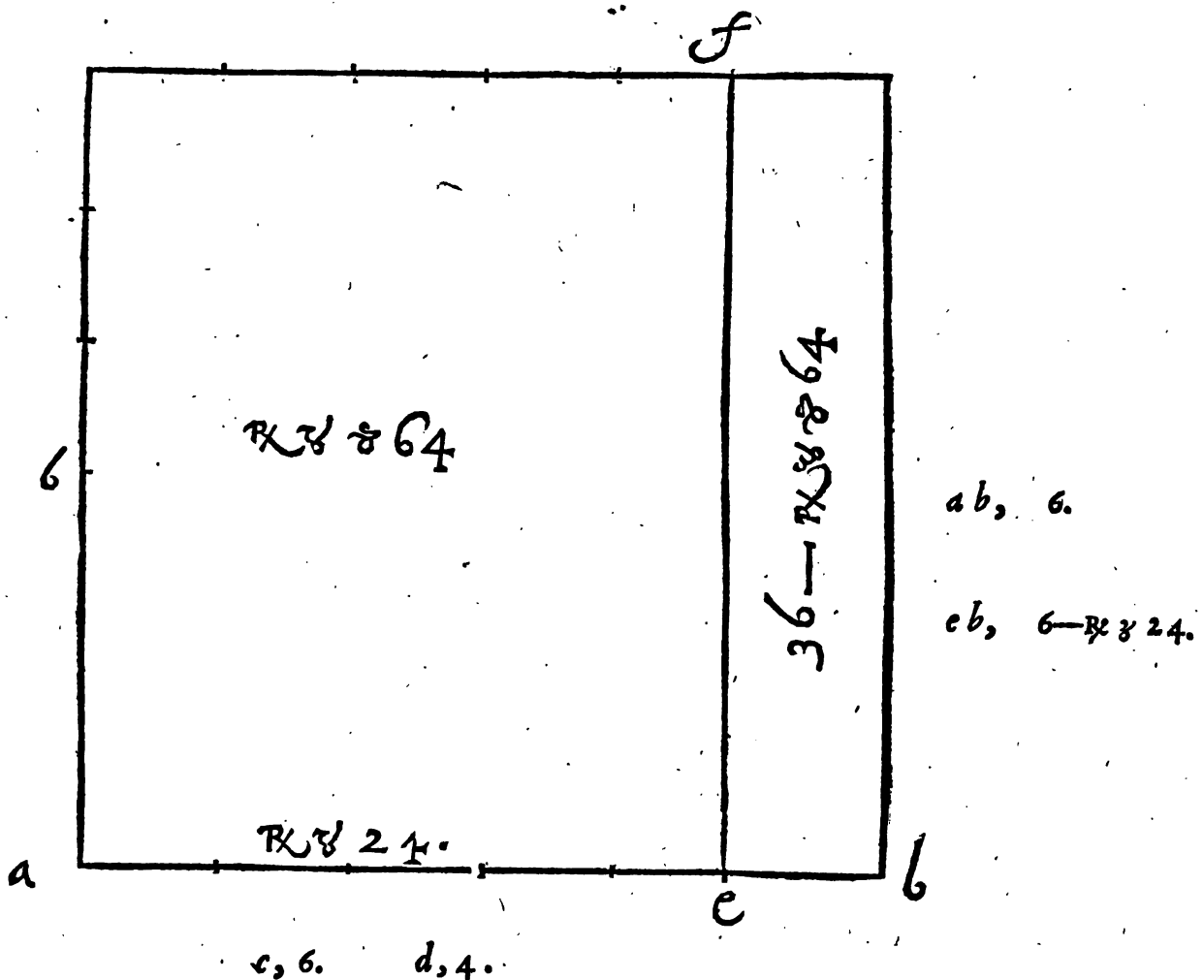
rectangulum sub a f, f b, (quod quadrato ex c e, aequale est) aequale sit quadrato ex f g, enim f g, media proportionalis inter a f, f b) erunt quadrata ex f g, & c e, inter se a. Quare c d, dupla existens ipsius c e, dupla quoque erit ipsius f g, ac propterea ex lemi Clauij propof. antecedentis rectangulum sub a b, c d, duplum erit rectanguli sub a b, f g f g, sit dimidia minoris lineæ c d) rectangulum autem sub a b, c d, Rationalibus potentia commensurabilibus, Medium est, per 22. propof. huius lib. Igitur & rectangulum sub a b li commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium erit: Atqui rectangulo sub a b, f g, est rectangulum sub a g, g b, ex 1. lemme Clauij propof. antecedentis: Quare content a g, g b, Medium & Irrationale est. Iam verò compositum ex rectorum quadratis a g, g b, rationale est ostensum. Inuenta sunt igitur due rectæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM CLAVII.

DEMONSTRATUR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant Rationale, hac ferè ratione.

Exponatur Rationalis linea a b, & duo numeri c d, quarum c, maior sit, non habentes proportionem quam quadratum sit. itque ut c, ad d, ita quadratum ex a b, ad quadratum ex a e, & tandem descripto quadrato ex a b, educat a b, perpendicularis. Quoniam igitur est ut c, ad d, ita quadratum ex a b, ad quadratum ex a e. Non habet autem c, portionem quam quadratus ad quadratum; erunt latera a b, a e, dictorum quadratorum proportionem non habenti quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia. Ac propterea cum a b, tota longitudine sit incommensurabilis a e, erit eadem a b, & reliqua e b, longitudine incommensurabilis ex coroll. 17. huius lib. Vt autem a b, ad a e, ita c, ad a f, igitur cum a b, a e, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex a b, & rectanguli commensurabilia. Quare quadrato ex a b, existente Rationali, quod & a b, Rationalis ponatur, erit a f, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus b f, Irrationale esse. Quia verò a f, b f, componunt quadratum ex a b; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

Q

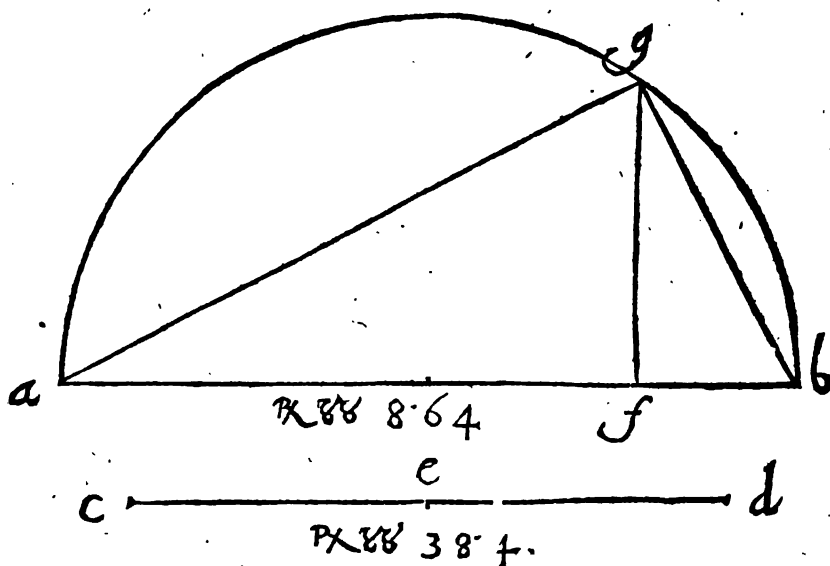


At vero si a, f, f, b , Rationalia sint, ostendemus & totum a, f, b , ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumque a, f ,
 16. decimi. f, b , Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur & totum a, f, b , ex ipsis compositum utrique eorum commensura-
 9. definit. bile erit. Quare a, f, b , totum commensurabile utrique Rationalis a, f, b , Rationale quoque est. Quod est propositum.

Probl. II. Propos. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

REPERIANTUR dua Media a, b, c, d , solùm potentia inter se commensurabiles Rationale continentibus, quarum a, b , maior plus possit, quàm minor c, d , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, fiantque reliqua, ut in antecedenti propositione. Igitur demonstrabimus, ut in præcedenti rectas, a, g , & g, b , esse potentia incommensurabiles. Quoniam verò quadratum ex Media a, b , æquale est quadratis rectarum a, g, g, b , ex 47. propos. lib. I. erit ideò compositum ex ipsarum quadratis a, g, g, b , Medium. Rursus ostendemus ut in antecedenti propositione rectangulum sub a, b, c, d , duplum esse rectanguli sub a, b, f, g , ac proinde rectangula illa esse inter se commensurabilia. Igitur cum rectangulum sub a, b, c, d , ex hypothesi Rationale existat, erit & rectangulum sub a, b, f, g , huic commensurabile, Rationale. Iam verò compositum ex rectarum quadratis a, g, g, b , Medium ostensum est. Quare rectæ a, g, g, b , simul compositæ faciunt



ag , R $\frac{8}{8}$ (R $\frac{8}{8}$ 216 + R $\frac{8}{8}$ 72.)

gb , R $\frac{8}{8}$ (R $\frac{8}{8}$ 216 - R $\frac{8}{8}$ 72)

Tota superficies sub ag , gb , contenta erit.

R $\frac{8}{8}$ 864 + 24.

ce , R $\frac{8}{8}$ 24.

gf , R $\frac{8}{8}$ 24.

af , R $\frac{8}{8}$ 54 + R $\frac{8}{8}$ 6.

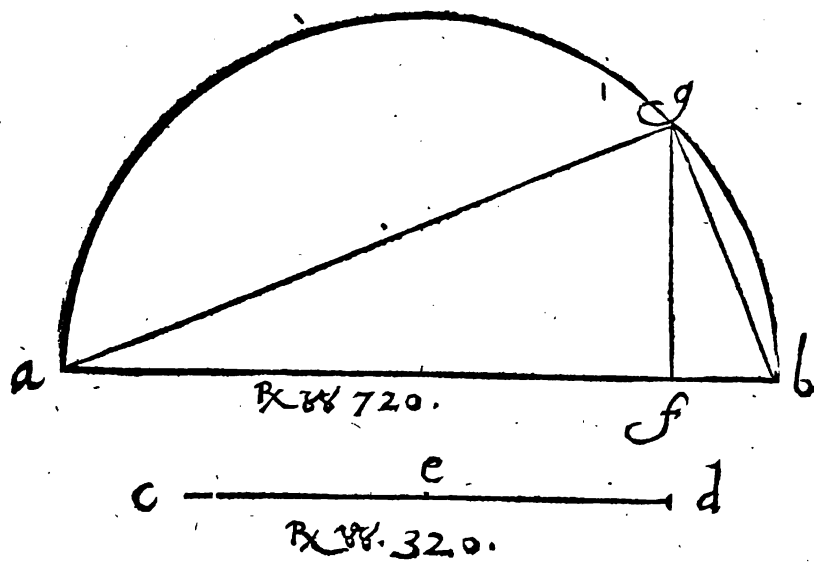
fb , R $\frac{8}{8}$ 54 - R $\frac{8}{8}$ 6.

compositum ex rectarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale; Inuenta sunt ergo duæ Mediæ, &c. Quod erat faciendum.

Probl. 12. Propos. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

REPERIANTVR duæ Mediæ a , b , c , d , quæ inter se sint tantum commensurabiles potentia, Mediumque contineant, ita ut maior a , b , plus possit, quam minor c , d , quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, & reliqua construantur, ut in propos. 34. Ostendemus igitur rectas a , g , g , b , esse potentia incommensurabiles. Quoniam verò quadratum ex a , b , Media, Medium est, sitque æquale quadratis rectarum a , g , g , b , per 47. lib. 1. erit & compositum ex ipsarum quadratis a , g , g , b , Medium. Iam verò demonstrabimus ut in 34. propos. lib. huius, rectangulum sub a , b , & c , d , duplum esse rectanguli sub a , b , f , g , ac proinde illi esse commensurabile: igitur & Medium, cum rectangulum sub a , b , c , d , ex hypothese Medium sit, rectangulum autem sub a , b , f , g , æquale est rectangulo sub a , g , g , b , contento, igitur rectangulum sub a , g , g , b , Medium est. Quoniam verò recta a , b , longitudine ponitur incommensurabilis ipsi c , d , eidem autem c , d , recta c , e , longitudine sit commensurabilis, quod illa huius dupla sit, erunt rectæ a , b , c , e , incommensurabiles longitudine, ex 13. propos. lib. huius, Sed ut a , b , ad c , e , ita per lemma 3. Clavi propos. 19. lib. huius quadratum ex a , b , est ad rectangulum sub a , b , c , e , hoc est, ad rectan-



$ag, R\ 3 (R\ 3\ 180 + R\ 3\ 60.)$

$gb, R\ 3 (R\ 3\ 180 - R\ 3\ 60.)$

Tota superficies contenta sub ag, gb , est.

$R\ 3\ 720 + R\ 3\ 480.$

$ce, R\ 3\ 20.$

$gf, R\ 3\ 20.$

$af, R\ 3\ 45 + R\ 3\ 5.$

$fb, R\ 3\ 45 - R\ 3\ 5.$

gulum sub a, bf, g , vel sub a, g, gb , Quare quadratum ex a, b , incommensurabile est rectangulo sub a, g, gb , Inuenimus igitur duas rectas, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM CLAVII.

EX hoc verò Problemate facile illud absoluemus quod ad propof. 24. huius lib. nos demonstraturos recepinus nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QUONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum a, g, g, b , quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum, Medium, & hoc rectangulum Medium, Media, incommensurabiles tam longitudine quàm potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est compositum ex quadratis rectarum a, g, g, b , & rectangulum sub a, g, g, b , commensurabilia. Quod non ponitur. Quocirca si sumatur a, b , potens compositum ex quadratis rectarum a, g, g, b , & alia recta potens rectangulum sub a, g, g, b , id est, media proportionalis inter a, g, b , inuenta erunt duæ Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIUM SENARIORVM

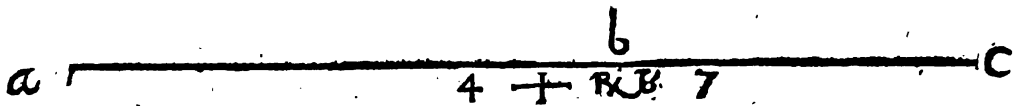
PER COMPOSITIONEM.

Theor. 25. Propof. 37.

Si duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales a, b, c , potentia inter se tantum commensurabiles, Inuenianturque per 2. lemma traditum à Clauio propof. 21. Dico totam a, c , esse Irra-

tionalem. Quoniam enim a, b , longitudine incommensurabilis est ipsi b, c , sique, ut a, b , ad b, c , ita rectangulum sub a, b, b, c , ad quadratum ex b, c , ex lemmate Clauij propof. 31. lib. huius, erit re-



ctangulum sub a, b, b, c , quadrato ex b, c , incommensurabile, per 10. propositionem lib. huius. Sed rectangulo sub a, b, b, c , commensurabile est eius duplum; nimirum quod bis sub a, b, b, c , continetur, & quadrato ex b, c , commensurabile est quadratum recte a, b , (sunt enim ambo quadrata Rationalia) atque adeo & compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , eidem quadrato ex b, c , commensurabile est, ut constat ex 16. propof. lib. huius. Quare ex iis, quae à Clauio tradita sunt scholio propof. 14. lib. huius, quod bis sub a, b, b, c , continetur incommensurabile est composito ex rectarum quadratis a, b, b, c , Quocirca compositum ex eo, quod bis sub a, b, b, c , & compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , hoc est totum quadratum ex a, c , contentum (nam quadratum hoc aequale est quadratis rectarum a, b, b, c , una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , comprehenso, ut constat ex 4. propof. lib. 2.) incommensurabile est composito ex rectarum quadratis a, b, b, c , ut patet ex 17. propof. lib. huius. Sed compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , Rationale est, cum sit commensurabile ostensum quadrato lineae Rationali b, c , Igitur quadratum ex a, c , quadrato Rationali b, c , incommensurabile, Irrationale est, atque adeo recta a, c , Irrationalis, ex 10. definitione lib. huius. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus scilicet a, b, b, c , componitur. Si duae igitur, &c. Quod erat ostendendum.

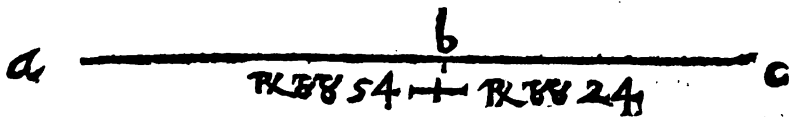
SCHOLIUM CLAVII.

ITAEQUE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duae lineae Irrationales. Nam recta, quae inter eas est medio loco proportionalis, Irrationalis est, quae Media vocatur. At verò composita ex ipsis, Irrationalis est, ^{a 22. decimi.} ^{b 37. decimi.} quae ex binis nominibus dicitur.

Theor. 16. Propof. 38.

Si duae Mediae potentia tantum commensurabiles componantur, quae Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

COMPONANTVR duae Media inuenta propof. 28. lib. huius, sintque illae a, b, b, c , quae tantum potentia commensurantur, & quae Rationale contineant. Dico totam a, c , esse Irrationalem. Nam cum recta a, b , sit ad rectam b, c , ut rectangulam sub a, b, b, c , ad quadratum minoris b, c , ut vult lemma Clauij propof. 31. lib. huius. Sunt autem a, b, b, c , incommensura-



biles longitudine ex positione, erunt rectangulum sub a, b, b, c , & quadratum minoris b, c , incommensurabilia, ut constat ex 10. propof. lib. huius: Rectangulo autem sub a, b, b, c , contento,

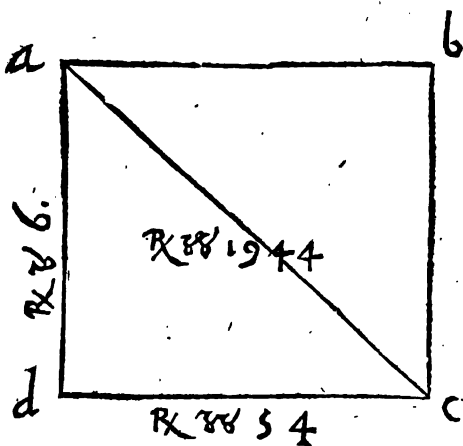
R

commensurabile est, quod bis sub $a b, b c$, & quadrato minoris $b c$, commensurabile est compositum ex rectorum quadratis $a b, b c$, (Nam cum $a b, b c$, sint commensurabiles potentia, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo, ut ex 16. propositione colligitur, compositum ex rectorum quadratis $a b, b c$, quadrato minoris $b c$, commensurabile) Igitur rectangulum bis sub $a b, b c$, comprehensum, & compositum illud ex rectorum quadratis, incommensurabilia sunt, ut constat ex iis, quæ à Clauio sunt tradita scholio propof. 14. lib. huius. Compositum igitur ex rectorum quadratis $a b, b c$, vnà cum rectangulo bis sub $a b, b c$, id est totum quadratum ex $a c$, quod huic composito æquale est per 4. propof. lib. 2. rectangulo bis sub $a b, b c$, contento, incommensurabile est, ut vult 17. propof. lib. huius. Sed eidem rectangulo bis sub $a b, b c$, contento, commensurabile est, quod semel tantum sub $a b, b c$, continetur, ut sepius à nobis est repetitum. Quare quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a b, b c$, est incommensurabile. Sed rectangulum sub $a b, b c$, Rationale ponitur. Igitur quadratum ex $a c$, huic Rationali incommensurabile, Irrationale est, per 10. defin. lib. huius, ac proinde & recta $a c$, Irrationalis. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel ut alij loquuntur Bimediale prius. Si igitur duæ Mediæ, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA EX CLAVIO.

QVOD sub linea Rationali & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATUR rectangulum $a b c d$, sub Rationali $a d$, & Irrationali $d c$, Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem $a d$, applicatum latitudinem $d c$, Rationalem. Quod est absurdum, ponitur enim $d c$, Irrationalis. Non ergo $a c$, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.



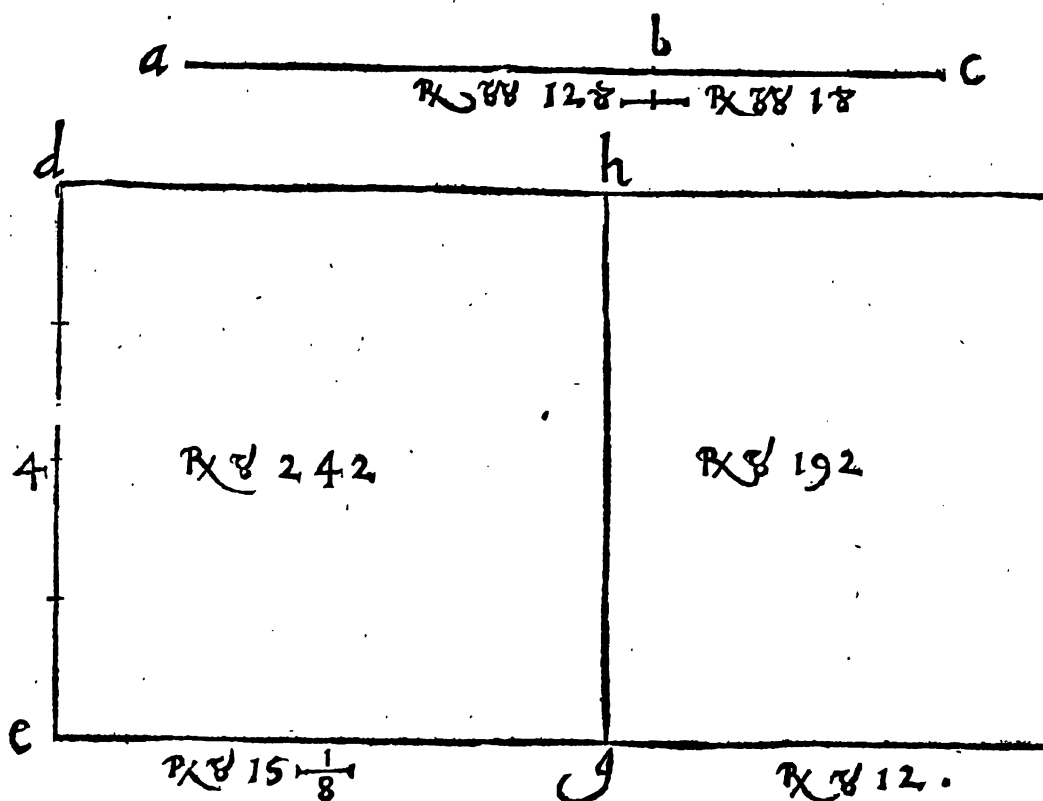
Theor. 27. Propof. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTUR duæ Mediæ $a b, b c$, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, sintque inuenta per ea, quæ ad propof. 29. lib. huius docuimus. Dico totam $a c$, esse Irrationalem. Exponatur Rationalis $d e$, ad quam applicetur rectangulum $d f$, æquale quadrato ex $a c$, descripto, & composito ex rectorum quadratis $a b, b c$, aliud rectangulum describatur ad eandem Rationalem $d e$, sitque $d g$. Quoniam quadratum ex $a c$, hoc est rectangulum $d f$, illi æquale duobus quadratis, ex $a b, b c$, descriptis vnà cum duobus rectangulis ex $a b, b c$, contentis, est æquale, per 4. propof. lib. 2. erit rectangulum $h f$, æquale rectangulo bis sub $a b, b c$, contento. Cum verò ex hypothesi rectangulum sub $a b, b c$, sit Medium, erit &

ELEMENTVM DECIMVM.

h, f , illi commensurable, Medium; Est enim rectangulum h, f , duplum rectanguli sub comprehensi, ut constat ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius. Rursus quia qu



Medius a, b, b, c , potentia commensurabilibus sunt inter se commensurabilia, erit & co ex rectarum quadratis utriusque quadrato commensurable, atque adeo & rectangulum compositum æquale; Sed tam quadratum ex a, b , quam quadratum ex b, c , Medium est. compositum illud, Medium erit, ac proinde & rectangulum d, g , ut colligitur ex corollarij propos. 24. lib. huius. Quoniam igitur Media d, g, h, f , ad Rationalem d, e , sunt (nam g, h , Rationali d, e , est æqualis) erunt latitudines e, g, g, f , Rationales, & Rationales d, e , longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Deinde cum sint longitudine incommensurabiles, sitque ut a, b , ad b, c , ita quadratum ex a, b , ad rectangulum sub a, b, b, c , ex lemmate 3. Clauij propositionis 19. lib. huius erit quadratum ex a, b , sub a, b, b, c , contento, incommensurable, ut scholium Clauij propos. 10. lib. huius docet. drato ex a, b , compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , iam est ostensum commensurabile rectangulo sub a, b, b, c , commensurable est etiam, quod bis sub a, b, b, c , continetur, me à nobis est demonstratum. Quare ex iis, quæ traduntur à Clauio scholio propos. 14. erit compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , id est rectangulum d, g , rectangulo b, c , hoc est, rectangulo h, f , incommensurable. Igitur cum ex 1. propos. lib. 6. sit ut d, g , ad rectangulum h, f , sic recta e, g , ad rectam g, f , erunt rectæ e, g, g, f , inter se longi commensurabiles, sed Rationales sunt ostensa e, g, g, f , Rationales igitur sunt e, g, g, f , potentia commensurabiles: Igitur tota e, f , composita ex duabus Rationalibus potentia commensurabilibus, Irrationalis est, ut vult 37. propos. lib. huius. Quare rectangulum tentum sub Rationali d, e , & Irrationali e, f , Irrationale est, ex lemmate Clauij præcedentis, ac proinde & quadratum ex a, c , huic rectangulo æquale, Irrationale

quoque $a c$, Irrationalis, per 10. defin. lib. huius. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, vel ut aliis placet Bimediale secundum. Si duæ igitur, &c. Quod erat ostendendum.

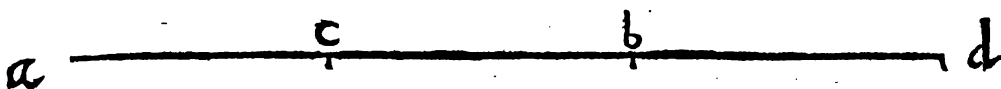
SCHOLIUM CLAVII.

VOCATIVIT Euclides in precedenti propositione lineam Irrationalem $a c$, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam. Hic vero lineam Irrationalem $a c$, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propof. 22. huius lib.

LEMMA CLAVII.

Si recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta $a d$, in b , non bifariam sitque maior pars $a b$, in qua sumatur $b c$, minori $b d$, æqualis, ut sit $a c$, excessus, quo $a b$, superat $b d$, hoc est $b c$, ipsi $b d$, æqualem.



$a d$, R. & 40. $a b$, R. & 40—R. & 5. $a c$, R. & 40—R. & 20. $c b$, R. & 5. $b d$, R. & 5

Dico quadrata rectarum $a b$, $b d$, simul, maiora esse rectangulo bis sub $a b$, $b d$, quadrato rectæ $a c$. Quoniam enim quadrata ex $a b$, $b c$, æqualia sunt rectangulo bis sub $a b$, $b c$, unà cum quadrato ex $a c$, estque $b c$, ipsi $b d$, æqualis: erunt quoque quadrata ex $a b$, $b d$, æqualia rectangulo bis sub $a b$, $b d$, unà cum quadrato ex $a c$. Quare quadrata ex $a b$, $b d$, maiora sunt quàm rectangulum bis sub $a b$, $b d$, quadrato rectæ $a c$. Quod est propositum.

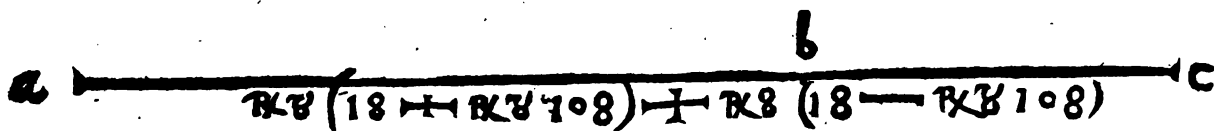
COROLLARIUM CLAVII.

Ex hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

Theor. 28. Propof. 40.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ $a b$, $b c$, inuenta per ea, quæ docuimus propof. 34. potentia incommensurabiles, faciântque compositum ex ipsarum quadratis Rationale, At rectangulum sub ipsis contentum, Medium. Dico totam $a c$, esse Irrationalem. Nam cum rectangulum sub $a b$, $b c$, ex hypothesi Medium sit, erit & bis sub $a b$, $b c$, contentum, Medium quoque, ut iam sapissime à nobis demonstratum est: At vero compositum ex rectarum quadratis ex



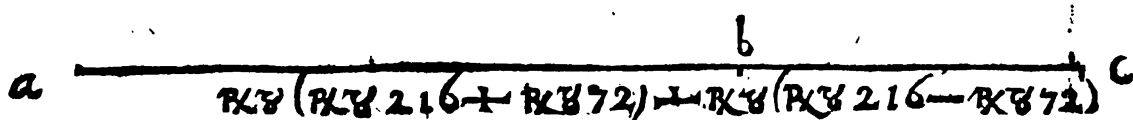
hypothesi ponitur Rationale. Igitur rectangulum bis sub $a b$, $b c$, huic composito incommensurabile erit: Rectangulum quoque bis sub $a b$, $b c$, unà cum composito ex rectarum quadratis $a b$, $b c$,

b, c , hoc est quadratum ex a, c , incommensurable erit composito ex rectarum quadratis a, b, b, c per 17. propos. lib. huius. Igitur cum compositum illud Rationale sit, erit quadratum a, c , huic Rationali incommensurable, Irrationale, ut vult 10. defin. lib. huius, Ac proinde & recta a, c , Irrationalis. Vocetur autem Maior, nam cum possit duo quadrata ex a, b, b, c , descripta, una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , comprehenso. Sitque compositum illud maius rectangulo bis sub a, b, b, c , ut constat ex lemmate Clauij antecedentis propositionis, sitque compositum illud Rationale, & rectangulum Medium, recte vocabitur a, c , Maior: Nam à Rationali, quod maius est nomen sumitur. Si igitur due recta, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 29. Propos. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale, ac Medium potens.

COMPONANTVR due Media inuenta per ea, quæ ad propos. 35. tradidimus, sintque a, b, b, c , quæ inter se potentia non commensurantur, faciantque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam a, c , ex illis



duabus. Media compositam, esse Irrationalem. Nam cum compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , Medium sit ex hypothesi, Quod verò bis sub ipsis continetur rectangulum, Rationale, erit compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , rectangulo bis sub a, b, b, c , contento, incommensurable, ex 17. propos. lib. huius. Compositum igitur ex rectarum quadratis a, b, b, c , una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , hoc est, quadratum ex a, c , descriptum, incommensurable est rectangulo bis sub a, b, b, c , ut constat ex eadem 17. propos. lib. huius. Cum igitur rectangulum bis sub a, b, b, c , contentum, Rationale existat, (est enim rectangulum illud duplum rectanguli sub a, b, b, c , contenti) erit quadratum a, c , huic Rationali incommensurable, Irrationale ex 10. defin. lib. huius, recta quoque a, c , Irrationalis. Vocetur autem Rationale, ac Medium potens, potest enim compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , quod quidem Medium est, & rectangulum bis sub a, b, b, c , contentum, quod Rationale existit. Igitur cum Rationale Irrationali nobilius sit, à nobiliori parte primum nomen desumitur. Igitur si due recta, &c. Quod erat demonstrandum.

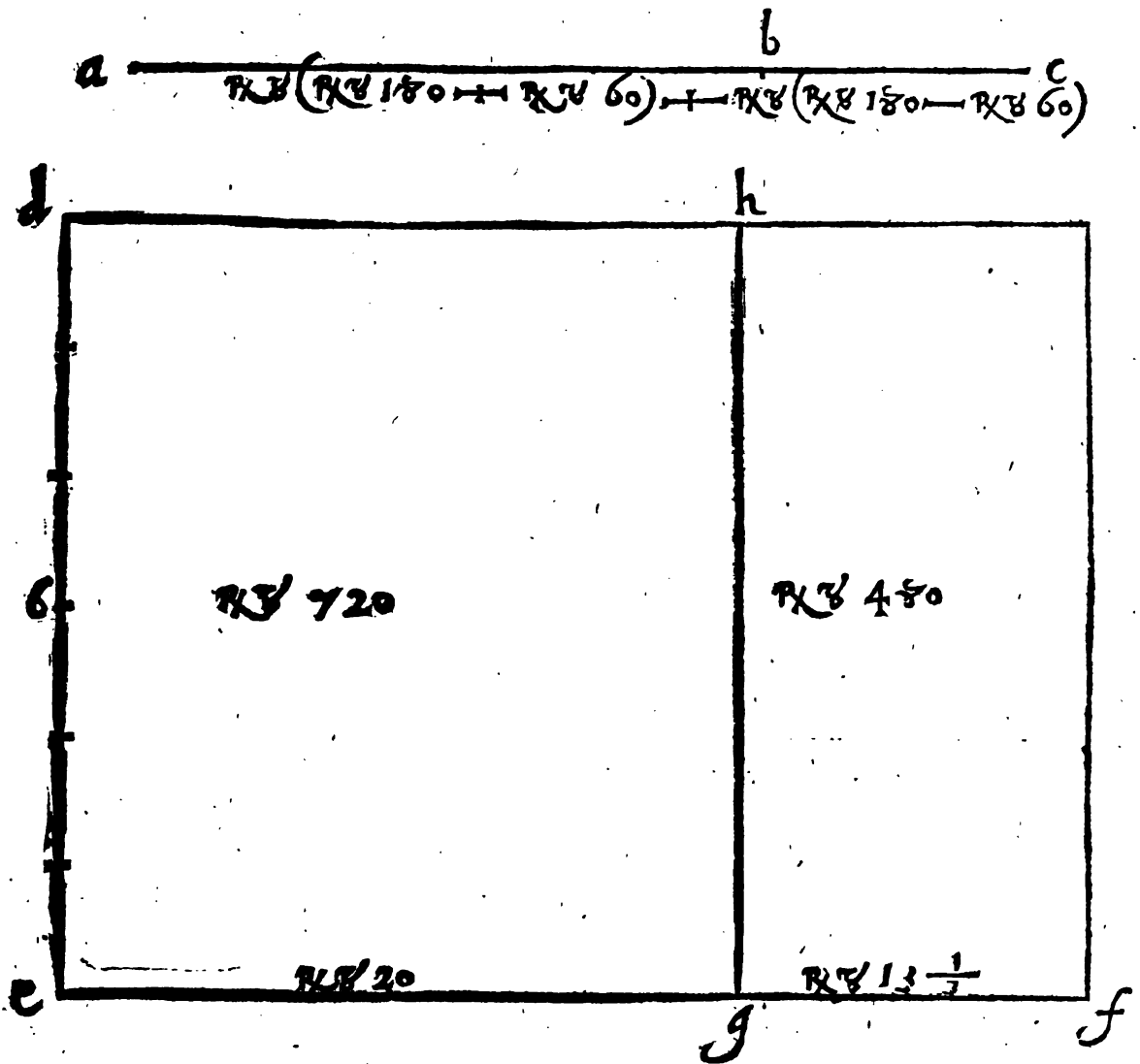
Theor. 30. Propos. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurableque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR due recta superius inuenta per ea, quæ docuimus propos.

S

36. sintque a, b, c , inter se incommensurabiles potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, & incommensurabile huic composito. Di-



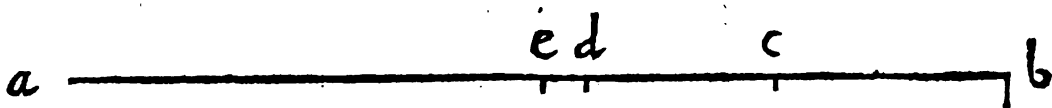
co totam a, c , esse Irrationalem. Exponatur Rationalis d, e , ad quam applicetur rectangulum d, f , aequale quadrato ex a, c , alterumque rectangulum ad eandem Rationalem d, e , applicetur, aequale composito ex rectarum quadratis a, b, b, c , sitque d, g , Quoniam igitur quadratum ex a, c , hoc est, rectangulum d, f , aequale est composito ex rectarum quadratis a, b, b, c , una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , contento, ut constat ex 4. propof. lib. 2. erit rectangulum h, f , rectangulo bis sub a, b, b, c , comprehenso aequale. Quoniam vero compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , hoc est, rectangulum d, g , & rectangulum bis sub a, b, b, c , Media sunt, sintque applicata ad Rationalem d, e , facient latitudines e, g, g, f , Rationales, ipsique d, e , Rationali exposita longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propof. lib. huius. Rursus cum compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , id est, rectangulum d, g , sit incommensurabile rectangulo sub a, b, b, c , Eadem autem rectangulo commensurabile constat, quod bis sub a, b, b, c , ut sapissime à nobis est repetitum, cum hoc sit illius duplum; sitque h, f , erunt d, g, h, f , inter se incommensurabilia. Cum autem sit ut d, g , ad h, f , ita recta e, g , ad rectam g, f , erunt e, g, g, f , incommensurabiles longitudine. Iam autem Rationales sunt ostensa e, g, g, f . Rationales sunt igitur e, g, g, f , & solum potentia commensurabiles, ac proinde tota e, f , ex duabus Rationalibus potentia tantum commensura-

bilibus composita, Irrationalis erit, ut vult 37. propositio lib. huius. Igitur rectangulum $d f$, sub Rationali $d e$, & Irrationali $e f$ contentum, Irrationale est, ex lemmate Clauij propositionis 38. lib. huius: Atque adeo & quadratum ex $a c$, illi æquale, Irrationale est, recta quoque $a c$, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, potest enim compositum ex rectarum quadratis $a b, b c$, quod Medium est, & rectangulum etiam sub ipsis contentum, quod etiam Medium est ostensum. Si ergo due rectæ, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA EX CLAVIO.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales, erunt quadrata partium magis inæqualium simul, maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta $a b$, inæqualiter in c , & rursus inæqualiter in d , sintque priores partes $a c, c b$, magis inæquales, quàm posteriores $a d, d b$. Dico quadrata ex $a c, c b$, simul maiora esse quadratis ex $a d$,



$a b$, $\text{R} \times 48$. $c b$, $\text{R} \times 3$. $d c$, $\text{R} \times 2$. $a c$, $\text{R} \times 12$. $a c$, $\text{R} \times 27$.
 $a d$, $\text{R} \times 27$ — $\text{R} \times 2$. $e d$, $\text{R} \times 3$ — $\text{R} \times 2$. $e c$, $\text{R} \times 3$. $d b$, $\text{R} \times 3$ + $\text{R} \times 2$.

$d b$, simul. Diuisa enim $a b$, bifariam in e , cadet punctum d , vel inter $e c$, vel inter $a e$. Cadat primum inter $e c$. Quoniam igitur rectangulum sub $a c, c b$, unà cum quadrato ex $e c$,^a æquale est quadrato ex $a b$: Item rectangulum sub $a d, d b$, unà cum quadrato ex $e d$, æquale est eidem quadrato ex $e c$, erit rectangulum sub $a c, c b$, unà cum quadrato ex $e c$, æquale rectangulo sub $a d, d b$, unà cum quadrato ex $e d$. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium $e c, e d$, cum quadratum ex $e c$, maius sit quadrato ex $e d$, erit reliquum rectangulum sub $a c, c b$, minus reliquo rectangulo sub $a d, d b$; ac propterea & rectangulum bis sub $a c, c b$, minus erit rectangulo bis sub $a d, d b$. Quoniam verò quadratum ex $a b$,^b æquale est tam rectangulo bis sub $a c, c b$, unà cum quadratis ex $a c, c b$, quàm rectangulo bis sub $a d, d b$, unà cum quadratis ex $a d, d b$, erit rectangulum bis sub $a c, c b$, unà cum quadratis ex $a c, c b$, æquale rectangulo bis sub $a d, d b$, unà cum quadratis ex $a d, d b$. Quare cum rectangulum bis sub $a c, c b$, ostensum sit minus rectangulo bis sub $a d, d b$, erunt reliqua quadrata ex $a c, c b$, maiora reliquis quadratis ex $a d, d b$. Quod est propositum.

Sed cadat iam d , inter a, e . Quoniam igitur partes $a c, c b$, magis inæquales ponuntur, quàm partes $a d, d b$, erit $a d$, (quæ minor est posteriorum) maior quàm $c b$ (quæ priorum minor est) ac proinde cum $a e, e b$, æquales sint, erit reliqua $e c$, maior quàm reliqua $d e$. Itaque quia rectangulum sub $a c, c b$, unà cum quadrato ex $e c$,^c æquale est quadrato ex $e b$: Item rectangulum sub $a d, d b$, unà cum quadrato



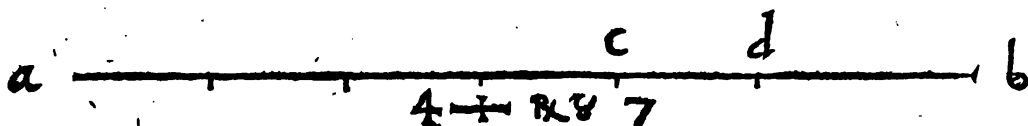
$a d$, $\text{R} \times 3$ + $\text{R} \times 2$.

ex $d e$, æquale est quadrato ex $a e$, hoc est, eidem quadrato ex $e b$; erit rectangulum sub $a c, c b$, unà cum quadrato ex $e c$, æquale rectangulo sub $a d, d b$, unà cum quadrato ex $d e$. Igitur ut prius demonstrabimus quadrata ex $a c, c b$, maiora esse quadratis ex $a d, d b$. Quod est propositum.

Theor. 31. Propos. 43.

QVÆ ex binis nominibus ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus a, b , diuisa ad punctum c , in sua nomina, ita vt a, c, c, b , sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. lib. huius. Dico a, b , non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, ita vt sint etiam Rationales linea potentia tantum commensurabiles. Quod si fieri potest, diuidatur iterum a, b , in sua nomina in puncto d , non erit igitur



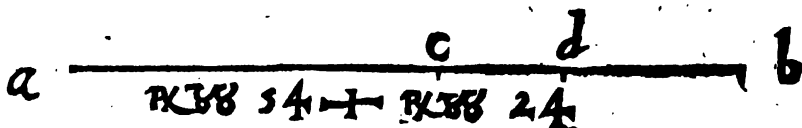
tur a, b , diuisa bifariam in puncto c , aliàs essent longitudine commensurabiles a, c, c, b , Quod est contra hypothesin, ponuntur enim esse tantum commensurabiles potentia pari ratione neque a, b , in puncto d , bifariam secabitur, cum a, d, d, b , sint tantum etiam Rationales, et potentia solum commensurabiles. Secetur a, b , tam in puncto c , quam in puncto d , inaequaliter, igitur partes a, c, c, b , vel minùs, vel magis inaequales sunt partibus a, d, d, b , ac propterea per lemma antecedens traditum à Clauio, quadrata ex a, c, c, b , quadratis ex a, d, d, b , vel minora, vel maiora sunt (non enim partes a, d, d, b , ubicunque punctum d , ceciderit, partibus a, c, c, b , aequales erunt, nimirum maior maiori, et minor minori, aliàs hac ratione a, b secaretur in eadem nomina, in qua secta est prima diuisione, quod non ponitur.) Si verò ab aequalibus inaequalia auferantur, excessus residuorum, ablatorum excessui est equalis, vt constat ex 16. pronunciato à Clauio tradito ad initium lib. 1. Sunt autem quadrata ex a, c, c, b , vnà cum rectangulo ex a, c, c, b , bis contento aequalia quadratis ex a, d, d, b , vnà cum rectangulo bis sub a, d, d, b , vt vult 4. propos. lib. 2. Inde fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex rectarum quadratis a, c, c, b , et ablati compositi ex rectarum quadratis a, d, d, b , idem sit reliqui rectanguli bis sub a, c, c, b , et reliqui rectanguli bis sub a, d, d, b , Excessus autem compositi ex rectarum quadratis a, c, c, b , et compositi ex rectarum quadratis a, d, d, b , spatium est rationale (nam cum a, c, c, b , ex hypothesi sint Rationales, et solum potentia commensurabiles, erunt et earum quadrata rationalia, ac proinde et compositum ex rectarum quadratis Rationale, ex iis, quae à Clauio sunt tradita scholio propos. 14. lib. huius. Pari ratione et compositum ex rectarum quadratis a, d, d, b , Rationale erit, Quare cum Rationale superet Rationale, Rationali, vt vult scholium Clauij propos. 27. lib. huius, manifestum est, excessum compositi ex rectarum quadratis a, c, c, b , et compositi ex rectarum quadratis a, d, d, b , spatium esse Rationale.) Igitur excessus rectanguli bis sub a, c, c, b , et rectanguli bis sub a, d, d, b , bis spatium etiam Rationale est. Sed rectangulum sub a, c, c, b , Rationalibus potentia solum commensurabilibus, Medium est, vt docet 22. propos. lib. huius. Igitur et quod bis sub a, c, c, b , Medium quoque erit, per ea, quae à Clauio traduntur in coroll. propos. 24. lib. huius. Simili argumento rectangulum bis sub a, d, d, b , Medium est. Quare cum ex 27. propos. huius lib. Medium à Medio non superetur, Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub a, c, c, b , nec rectanguli bis sub a, d, d, b , Rationale spatium. Sed Rationale esse demonstrauimus. Quod est absurdum. Igitur ex binis nominibus a, b , non potest diuidi ad aliud punctum, quam ad c , in sua nomina: Sed ad vnum duntaxat punctum in sua nomina diuiditur. Quod erat ostendendum.

Theor.

Theor. 32. Propos. 44.

QVÆ ex binis Mediis prima ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT recta $a b$, ex binis Mediis prima diuisa in puncto c , in sua nomina, ita vt $a c, c b$, sint Mediae potentia commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propof. 38. lib. huius. Dico $a b$, ad aliud punctum minimè diuidi posse in alia nomina, ita vt sint etiam duæ Mediae potentia inter se commensurabiles, facientesque rectangulum sub ipsis contentum, Rationale. Quod si fieri potest, sit iterum $a b$, diuisa in puncto d , vbi cumque igitur ceciderit punctum d , demonstra-



bimus vt in antecedenti excessum rectanguli bis sub $a c, c b$, & rectanguli bis sub $a d, d b$, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, Atqui excessus rectanguli bis sub $a c, c b$, & excessus rectanguli bis sub $a d, d b$, spatium est Rationale, nam cum rectangulum sub $a c, c b$, ex hypothesi Rationale sit, erit & quod bis sub $a c, c b$, continetur Rationale, vt saepe diximus, Pari argumento erit rectangulum sub $a d, d b$, Rationale atque adeo & quod bis sub $a d, d b$, Igitur cum Rationale superet Rationale, Rationali, vt demonstrauit Clavius in scholio propof. 27. lib. huius, manifestè dignoscitur excessum rectanguli bis sub $a c, c b$, & rectanguli bis sub $a d, d b$, spatium esse Rationale. Igitur excessus compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & excessus compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatia sunt Rationalia. Cum autem rectæ $a c, c b$, sint Mediae, & potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media, & commensurabilia, atque compositum ex rectarum quadratis $a c, c b$, vtrique quadrato commensurabile per 16. propof. lib. huius. Cum autem ambo quadrata illa sint Media, erit & compositum ex ipsis Medium, ex corollario Clauij propof. 24. lib. huius. Pari ratione & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, Medium demonstrabimus. Sed Medium non superat Medium, Rationali, vt constat ex 27. propof. libri huius. Igitur excessus compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium Rationale non est, Sed rationale ostendimus esse. Quod perabsurdum non igitur $a b$, ex binis Mediis prima ad aliud punctum quàm ad c , in sua nomina diuiditur, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 33. Propos. 45.

QVÆ ex binis Mediis secunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

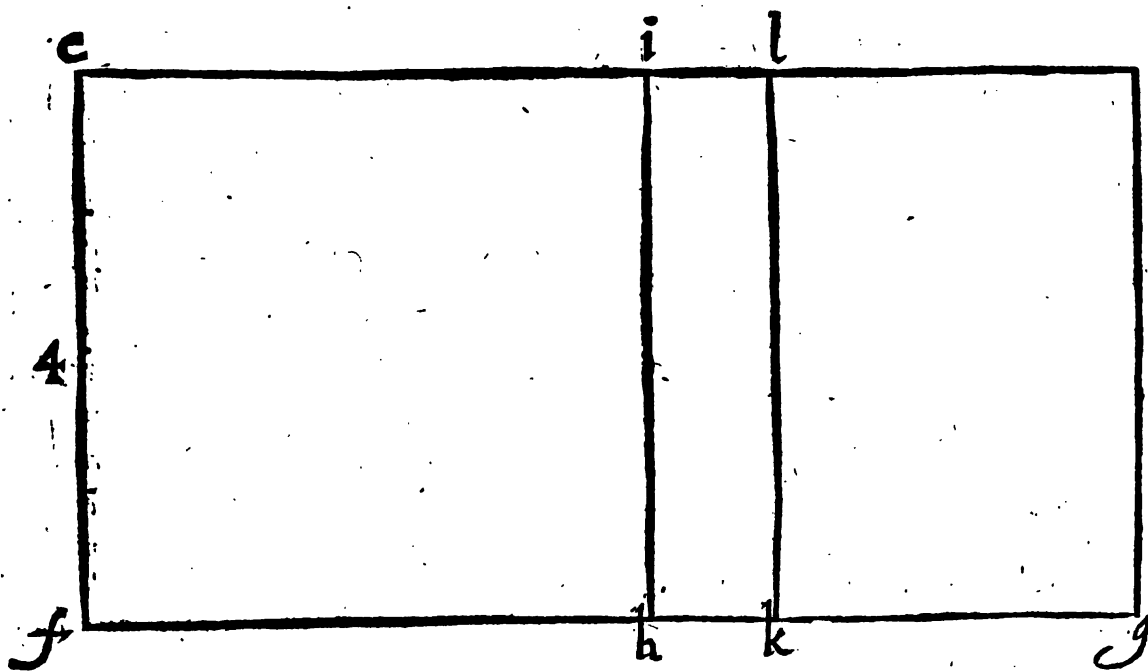
Sit $a b$, ex binis Mediis secunda diuisa in puncto c , in sua nomina ita vt $a c, c b$, Mediae sint tantum potentia commensurabiles Medium continentibus, vt vult propof. 39. lib. huius. Dico $a b$, ad aliud punctum non posse diuidi in alia nomina, quæ sint etiam lineæ Mediae, & potentia commensurabiles Medium comprehendentes. Si enim fieri potest diuisa sit iterum $a b$, in alia

T

nomina a, d, d, b . Igitur ubique punctum d , ceciderit, demonstrabimus ut in propof. 43. quadrata ex a, c, c, b , maiora esse quadratis a, d, d, b , vel minora. Exponatur rationalis e, f , ad quam



applicetur rectangulum e, g , quadrato a, b , aequale, ad eandemque rationalem e, f , aliud rectangulum applicetur aequale composito ex rectarum quadratis a, c, c, b , sitque illud e, h , erit igitur reliquum i, g , aequale rectangulo bis sub a, c, c, b , contento. Est enim quadratum ex a, b , aequale quadratis rectarum a, c, c, b , una cum rectangulo bis sub a, c, c, b , contento. Simili modo ad e, f , applicetur rectangulum e, k , aequale composito ex rectarum quadratis a, d, d, b , erit etiam reliquum l, g , rectangulo bis sub a, d, d, b , contento, aequale. Quoniam verò quadrata ex a, c, c, b , inaequalia



f, h , $R \times 15\frac{1}{2}$ h, g , $R \times 12$. Rectang. e, h , $R \times 242$. Rectang. i, g , $R \times 192$.

sunt quadratis ex a, d, d, b , erunt rectangula e, h, e, k , illis aequalia, inaequalia, recta quoque f, h, f, k , inaequales. Rursus cum quadrata ex a, c, c, b , sint maiora ex lemmate Clavi propof. 39. lib. huius, rectangulo bis sub a, c, c, b , erit rectangulum e, h , maius, quam rectangulum i, g , ac propterea e, h , maius, quam dimidium ipsius e, g , ideoque $\&$ recta f, h , maior, quam dimidium ipsius f, g , pari argumento demonstrabimus rectam f, k , maiorem esse dimidio f, g . Sunt igitur inaequales partes f, h, h, g , partibus f, k, k, g , singula singulis. Quoniam verò a, c, c, b , Media sunt, $\&$ potentia solum commensurabiles, erunt $\&$ earum quadrata, Media, $\&$ inter se commensurabilia. Quare compositum ex rectarum quadratis a, c, c, b , utriusque quadrato ex a, c, c, b , descripto commensurabile erit, per 16. propof. lib. huius sunt autem quadrata ex a, c, c, b , descripta, Media, Igitur $\&$ compositum illud, Medium erit ex corollario Clavi propof. 24. lib. huius. Pari ratione erit $\&$ rectangulum e, k , Medium, Cum rectangula e, h, e, k , ad Rationalem applicata faciant latitudines f, h, f, k , Rationales, $\&$ Rationali e, f , exposita longitudine incommensurabiles, ut vult 23. propof. lib. huius. Eodem modo cum rectangulum sub a, c, c, b , Medium sit, erit

Et quod bis sub $a c, c b$, continetur, Medium, nimirum $i g$, cum sit illi commensurabile, ex eodem corollario propof. 24. Quare cum applicetur ad Rationalem $b i$, erit recta $h g$, Rationalis ipsique $h i$, longitudine incommensurabilis, ut docet 23. propof. lib. huius. Non alia ratione demonstrabitur rectangulum $l g$, Medium esse, et rectam $k g$, Rationalem ipsi $k l$, longitudine incommensurabilem. Rursus cum $a c, c b$, Mediae sint longitudine incommensurabiles, sitque ut $a c$, ad $c b$, ita per lemma 3. Clauij propof. 19. lib. huius quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c, c b$, erit quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a l c, c b$, contento, incommensurabile, ut vult 10. propof. lib. huius. Quadrato autem ex $a c$, commensurabile est compositum ex rectarum quadratis $a c, c b$, ut iam praedictum fuit. Rectangulo vero sub $a c, c b$, contento commensurabile est, quod bis sub $a c, c b$, continetur. Quare compositum ex rectarum quadratis $a c, c b$, hoc est rectangulum $e h$, incommensurabile est, per scholium Clauij propof. 10. lib. huius, rectangulo bis sub $a c, c b$, hoc est rectangulo $i g$, Igitur cum ex 1. sexti constet esse, ut rectangulum $e h$, ad rectangulum $i g$, ita recta $f h$, ad rectam $h g$, erunt $f h, h g$, longitudine incommensurabiles, Rationales tamen ostensa sunt: Rationales igitur sunt $f h, h g$, et solum potentia commensurabiles. Atque adeo et tota $f g$, composita ex duabus Rationalibus inter se potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis, ut docet 37. propof. lib. huius, quae ex binis nominibus appellatur, diuisaque in puncto h , in sua nomina. Sed eodem argumento demonstrabimus rectam $f g$, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina in puncto k , Quod fieri non potest, ex iis, quae ad propof. 43. sunt demonstrata. Quare $a b$, et binus Medius secunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur, et c. ~~Et erat ostendendum.~~

Theor. 34. Propof. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT recta $a b$, diuisa in sua nomina in puncto c , ita ut $a c, c b$, sint recta potentia incommensurabiles, quae faciant compositum ex rectarum quadratis, Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium, ut vult propof. 40. huius lib. Dico $a b$, non posse diuidi ad aliud punctum, in alia nomina, quae etiam sint linea incommensurabiles potentia, facientesque compositum ex ipsarum quadratis, rationale, et rectangulum sub ipsis comprehensum, Medium. Quod si fie-

$$a \text{ --- } \overline{\text{---}} \text{ --- } b$$

$\text{RX} (18 \text{ --- } \text{RX} 108) \text{ --- } \text{RX} (18 \text{ --- } \text{RX} 108)$

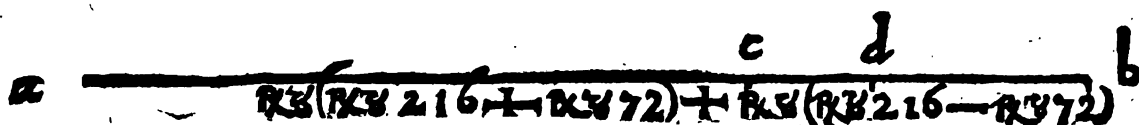
ri potest diuidatur iterum $a b$, in alia nomina in puncto d , Igitur ubicumque ceciderit punctum d , ostendemus ut in propof. 43. excessum compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, et compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, eundem esse, qui rectanguli bis sub $a c, c b$, et rectanguli bis sub $a d, d b$. At vero excessus compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, et compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium est Rationale, (nam cum iam compositum ex rectarum quadratis $a c, c b$, quam compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, sit Rationale, erit per ea, quae Clauius demonstrauit scholio propof. 27. libri huius, eorum excessus spatium Rationale.) Quare et excessus rectanguli bis sub $a c, c b$, et rectanguli bis sub $a d, d b$, Rationalis est. Cum autem rectangulum sub $a c, c b$, ex hypothesis sit Medium, erit et eius duplum, Medium, nimirum quod bis

sub a, c, b , continetur, ex corollario Clauij propof. 24. lib. huius. Pari ratione & quod bis sub a, d, b , Medium. Medium verò non superat Medium, Rationali, vt docet 27. propof. lib. huius. Quare excessus rectanguli bis sub a, c, b , nec rectanguli bis sub a, d, b , spatium est Rationale, Rationale tamen esse diximus. Quod per-absurdum. Non igitur Maior a, b , ad aliud punctum quàm ad c , in sua nomina diuiditur, sed ad vnum duntaxat punctum in sua nomina diuidi potest. Quod erat demonstrandum.

Theor. 35. Propof. 47.

RATIONALIS ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT a, b , linea, Rationale, ac Medium potens, quæ sit diuisa in puncto c , in sua nomina, ita vt a, c, b , sint rectæ incommensurabiles potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium: rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico a, b , non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ sint etiam linea potentia incommensurabiles, quarum compositum ex ipsarum quadratis, sit Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Si



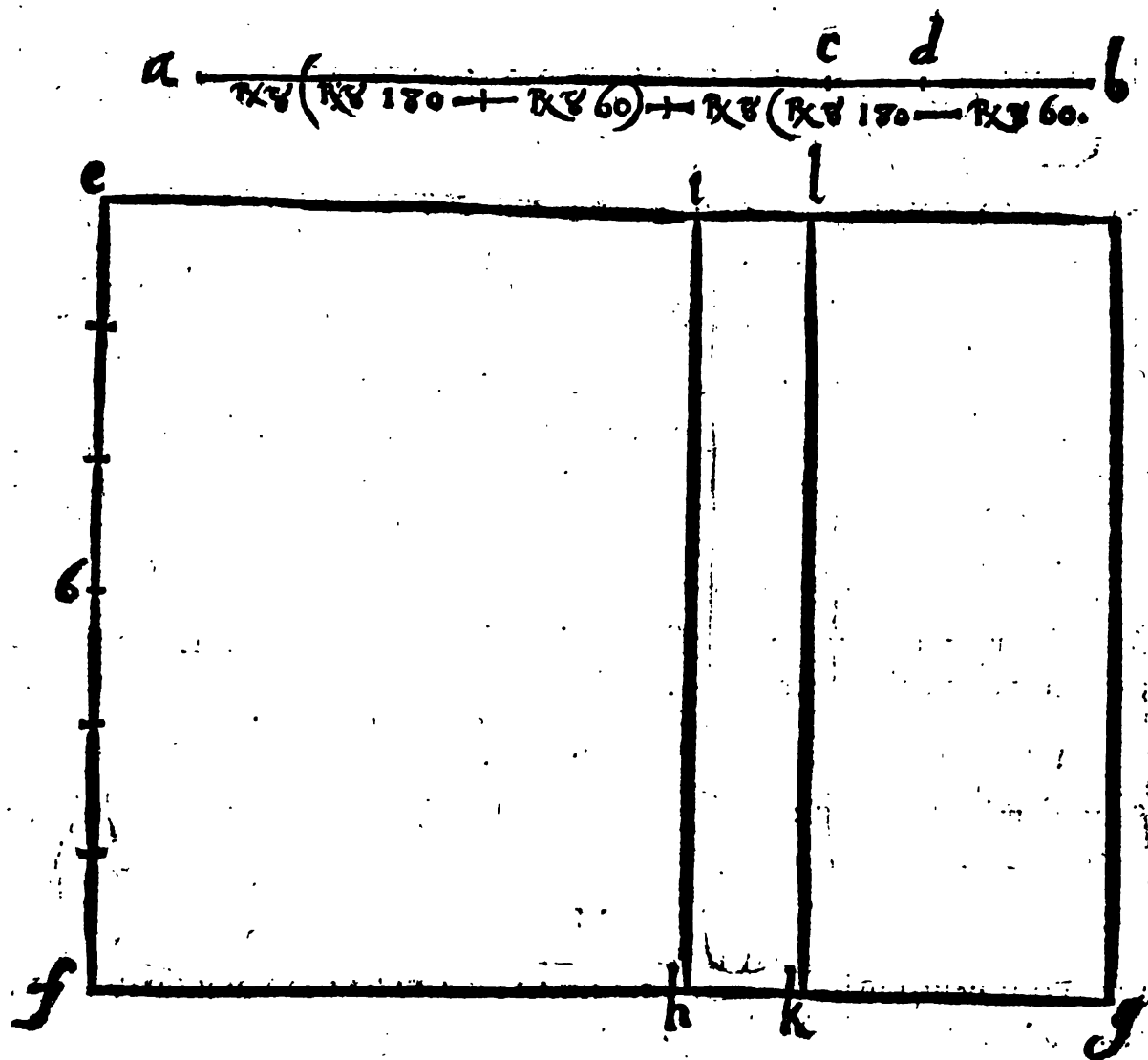
verò aliter fieri potest, sit iterum a, b , diuisa in puncto d , in alia nomina. Igitur vbi cumque punctum c , ceciderit, non secus ac in propof. 43. lib. huius ostendimus excessum rectanguli bis sub a, c, b , & rectanguli bis sub a, d, b , eundem esse, qui compositi ex rectarum quadratis a, c, b , & compositi ex rectarum quadratis a, d, b , Sed excessus rectanguli bis sub a, c, b , & excessus rectanguli bis sub a, d, b , spatium est Rationale, vt pari medio, quo vsi sumus propositione 44. lib. huius demonstrare facile est. Quare excessus compositi ex rectarum quadratis a, c, b , & compositi ex rectarum quadratis a, d, b , spatium Rationale est. Cum autem composita ex ipsarum quadratis, sint Media, Medium autem non superet Medium, Rationali, vt docet 27. propof. lib. huius, non erit eorum excessus spatium Rationale: Rationale tamen diximus. Quod absurdum. Non igitur recta a, b , in sua nomina diuiditur ad aliud punctum, quàm ad c , Sed a, b , quæ Rationale, & Medium potest in vnum duntaxat punctum diuiditur in sua nomina. Quod erat ostendendum.

Theor. 36. Propof. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea a, b , bina Media potens, diuisa in sua nomina in puncto c , ita vt a, c, b , sint rectæ potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, & incommensurable composito ex ipsarum quadratis, vt vult propof. 42. lib. huius. Dico a, b , non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ etiam sint rectæ potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurableque composito ex
rectarum

rectarum quadratis. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in alia nomina recta a b , in puncto d , Igitur ubicunque punctum d , extiterit, constructione facta ut in 45. propos. lib. huius demonstra-



fh , $\frac{1}{2} \times 20$. hg , $\frac{1}{2} \times 13 \frac{1}{2}$. Rectang. eh , $\frac{1}{2} \times 720$. Rectang. ig , $\frac{1}{2} \times 480$.

bimus ut ibi, partes fh , hg , partibus fk , kg , inaequales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex rectarum quadratis a c , c b , Medium ponitur, erit $\&$ rectangulum eh , illi equale, Medium, $\&$ quia rectangulum sub a c , c b , ex hypothesi Medium est, erit $\&$ eius duplum nempe ig , Medium, ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius. Media, autem eh , ig , ad Rationalem ef , applicata latitudines efficiunt Rationales, $\&$ ipsi Rationali exposita incommensurabiles longitudine, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Quare rectae fh , hg , Rationales erunt $\&$ ipsae ef , incommensurabiles longitudine. Eadem ratione demonstrabimus rectas fk , kg , Rationales esse, ipsique ef , Rationali exposita longitudine incommensurabiles. Cum autem compositum ex rectarum quadratis a c , c b , ex hypothesi incommensurabile sit rectangulo bis sub a c , c b , erunt rectangula eh , ig , inter se incommensurabilia (est enim eh , composito ex rectarum quadratis a c , c b , equale $\&$ ig , rectangulo bis sub a c , c b .) Quoniam vero ex 1. propos. lib. 6. constat esse, ut rectangulum eh , ad rectangulum ig , ita recta fh , ad rectam hg , erunt ideo rectae fh , hg , incommensurabiles. Iam vero Rationales sunt ostense. Igitur fh , hg , Rationales

V

sunt, & solum potentia commensurabiles. Quare tota fg , ex duabus Rationalibus potentia commensurabilibus composita Irrationalis erit, ut constat ex 37. propof. lib. huius, & diuisa in sua nomina in puncto h . Non aliter demonstrabimus rectam fg , sectam esse in alia nomina in puncto k , Quod per-absurdum, ut constat ex 43. propof. lib. huius. Quare recta ab , bina Media potent, non potest diuidi ad aliud punctum, quam ad c , in sua nomina, Imò ad vnum duntaxat punctum diuiditur. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

PROPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

Si quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

Si verò minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IIII.

Si quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

Si verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

Quod si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIUM CLAVII.

NUMERVS distarum sectionum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ,

quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit verumque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine; (aliis enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, ut in scholio propof. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel unum tantum, nempe maius aut minus, vel neutrum: Atque ita tria genera confurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (aliis enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur, una cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficiuntur una cum eisdem tribus generibus alia tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, ut ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

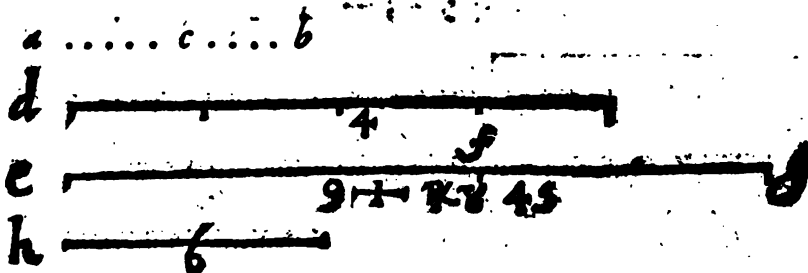
Patebit autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile, antecedit incommensurabile, ut manifestum est.

Rursus rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita lineæ Rationali; & secundam in qua minus nomen eidem Rationali lineæ exposita longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile. Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellatis; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

Probl. 13. Propof. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis a & b , id est 9. & 4. quorum excessus a & c , nimirum 5, non sit quadratus ita ut 9. & 4. habeant rationem, quam numeri quadrati, At vero 9. & 5. non habeant proportionem numerorum quadratorum. Deinde exponatur Rationalis d , cui etiam longitudine commensurabilis sit recta e & f , Erunt igitur e & f , Rationali d , commensurabilis longitudine, Rationalis. Fiat iterum ut numerus a & b , id est 9. ad numerum a & c , id est 5, ita per



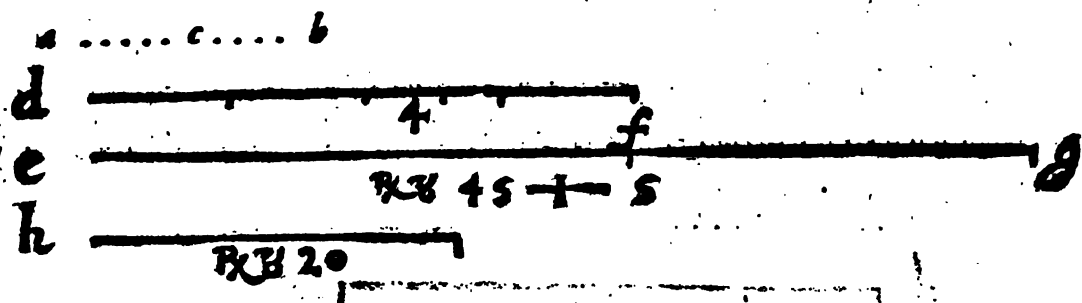
corollarium Clauij propof. 6. lib. huius, quadratum ex e & f ; ad quadratum ex f & g , Dico rectam e & g , esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex e & f , f & g , sunt commensurabilia eandem rationem habentia inter se, quam numeri 9. & 5. erunt & rectæ e & f , f & g , saltem potentia commensurabiles, ut constat ex 6. propof. lib. huius. Rationalis autem est ostensa e & f ; Rationalis igitur erit & f & g , quæ illi est commensurabilis. Sed quia numeri 9. & 5. non habent rationem, quam numeri quadrati habent, ideo nec quadrata ex e & f , f & g , rationem habere possunt, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum. Quare per 9. propof. lib. huius, rectæ e & f , f & g , longitudine sunt incommensurabiles, Igitur e & f , f & g , Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles, Atque adeo & tota e & g , composita ex duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus, Irrationalis erit, per 37. propof. lib. huius. Dico & primam esse. Nam cum sit, ut numerus quadratus 9. ad numerum non quadratum 5, ita quadratum ex e & f , ad quadratum ex f & g , Sit autem numerus 9. maior, quam 5, erit & quadratum ex e & f , maius, quam quadratum ex f & g , Sit igitur maius quadrato rectæ h , ex lemmate Clauij propof. 14. lib. huius. Igitur cum sit ut 9. ad 5, ita quadratum ex e & f , ad quadratum ex f & g , erit quoque per conuersionem ra-

tionis ut a b , ad c b , id est, ut 9 . ad 4 . videlicet ad excessum, quo antecedens a b , 9 . superat consequentem c b , id est, ad quadratum e f , ad quadratum ex h , nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum e f , superat consequens quadratum f g . Numerus autem 9 . ad 4 . habet Rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare quadrata ex e f , & h , eandem habebunt rationem inter se, ac proinde recta e f , & h , longitudine sunt commensurabiles, ut vult 9 . propos. lib. huius. Quia vero maius nomen e f , plus potest, quam minus f g , quadrato recta h , sibi longitudine commensurabilis, sitque maius nomen e f , Rationali d , exposita longitudine commensurabile, erit ex prima definitione, definitionum secundarum, recta e g , ex binis nominibus prima. Inventa est igitur ex binis nominibus prima. Quod erat faciendum.

Probl. 14. Propos. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis a b , c b , id est 9 . & 4 . ut in antecedenti propositione. Exponatur Rationalis quadam d , & ei longitudine commensurabilis sumatur alia f g , erit igitur e f g , Rationali d , commensurabilis, Rationalis. Deinde fiat ut numerus a c , id est 5 , ad numerum a b , id est 9 , ita per corollarium Clavi propo. 6 lib. huius, quadratum ex f g , ad quadratum ex e f . Dico e g , esse ex binis nominibus secundam. Nam cum quadrata ex f g , &



e f eandem habent proportionem, quam numeri 5 . & 9 . sunt commensurabilia per 6. propos. lib. huius & recta f g , & e f , saltem potentia commensurabiles. Sed f g , Rationalis est ostensa, igitur e f , Rationalis est. Quia vero 5 . & 9 . non habent proportionem, quam numeri quadrati habent. Ideo nec quadrata ex f g , & e f , eandem rationem habebunt recta igitur f g , & e f , incommensurabiles sunt longitudine, ut vult 9 . propos. lib. huius. Sed rationales sunt ostensa. Igitur f g , & e f , Rationales sunt, & solum commensurabiles potentia; Atque adeo tota e g , ex duobus Rationalibus tantum potentia commensurabilibus composita Irrationalis est per 37. propos. lib. huius, & ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Nam cum sit ut numerus 5 . ad 9 , ita quadratum ex f g , ad quadratum ex e f , & convertendo ut 9 . ad 5 , ita quadratum ex e f , ad quadratum ex f g . Sit autem numerus 9 . maior numero 5 . erit & quadratum ex e f , maius quadrato ex f g . Sit igitur maius quadrato recta h , ex lemmate Clavi propo. 14. lib. huius. Igitur ut in antecedenti demonstrabitur rectam h , longitudine esse commensurabilem recta e f . Quare cum maius nomen e f , plus possit, quam minus f g , quadrato recta h , sibi longitudine commensurabilis, sitque maius nomen e f , Rationali d , exposita longitudine incommensurabile, minus vero eidem Rationali commensurabile longitudine, erit recta e g , ex binis nominibus secunda, ut vult 2. definitio, secundarum definitionum. Inventa est igitur, & c. Quod erat faciendum.

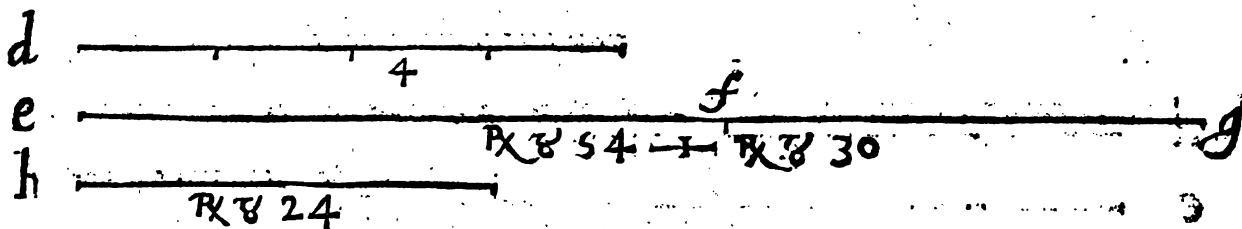
Probl.

Probl. 15. Propos. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis a b , c b , id est 9. & 4. ut in propos. 49. Sumatur alius numerus i . id est 6. qui nec ad 9. nec ad 4. habeat rationem, quam numeri quadrati habent inter se, quod facile fiet, si sumatur 6. non quadratus, qui proximè est maior, quam 5. Nam cum non sit quadratus, non habebit ad numerum quadratum a b , rationem numerorum quadratorum. Rursus cum 6. non quadratus sit proximè maior, quam a c , id est 5. differet vel sola unitate, vel binario, (unitate quidem quando a c , numerus fuerit, cui addita unitas quadratum non facit; Binario verò, quando unitas addita ad a c , quadratum facit, ut si numerus a c , sit 8. erit non quadratus proximè maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit numerum quadratum 9. Si verò a c , sit 5. erit non quadratus proximè maior 6. qui à 5. differt unitate, unitas enim addita ad 5. facit 6. numerum non quadratum, &c.) Quare ut Clavius

$$a \dots c \dots b$$

$$i \dots$$


demonstravit in scholio propos. 8. lib. 8. inter i , & a c , id est inter 5. & 6. non cadet medius proportionalis, Igitur nec plani similes, atque adeo non habebunt rationem, quam quadrati numeri inter se habent. Exponatur Rationalis quadam d , & fiat per corollarium Clavi propos. 6. lib. huius ut numerus 6. ad 9. ita quadratum ex d , ad quadratum ex e f , erunt igitur quadrata ex rectis d , & e f , commensurabilia, ut vult propos. 6. lib. huius, atque adeo d , & e f , saltem potentia commensurabiles. Existente igitur d , Rationali, erit & e f , ei commensurabilis, Rationalis. Quoniam verò 6. & 9. hoc est quadratum ex d , ad quadratum ex e f , non habet rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt recte d , & e f , longitudine incommensurabiles, ut constat ex 9. propos. lib. huius. Rursus ex eodem corollario Clavi propos. 6. lib. huius, fiat ut a b , ad a c , id est ut 9. ad 5. ita quadratum ex e f , ad quadratum ex f g , erunt igitur quadrata ex rectis e f , f g , commensurabilia, ex 6. propos. huius lib. recte quoque e f , f g , saltem potentia commensurabiles. Quare cum e f , Rationalis sit ostensa, erit & f g , ei commensurabilis, Rationalis. Quoniam verò 9. ad 5. hoc est quadratum ex e f , ad quadratum ex f g , proportionem numerorum quadratorum non habet, erunt ex 9. propos. lib. huius recte e f , f g , longitudine incommensurabiles. Quare e f , f g , Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles. Atque idcirco tota e g , Irrationalis per 37. propos. lib. huius, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & tertiam esse. Nam cum sit ut numerus 6. ad 9. ita quadratum ex d , ad quadratum ex e f , & ut 9. ad 5. ita quadratum ex e f , ad quadratum ex f g , erit ex aquo ut 6. ad 9. ita quadratum ex d , ad quadratum ex e f , non habent autem 6. & 9. rationem numerorum quadratorum, Igitur nec quadrata ex d , & f g , eandem inter se proportionem habebunt: Quare recte d , & f g , incommensurabiles sunt longitudine, ut colligitur ex 9. propos. lib. huius. Cum autem sit ut a b , id est 9. ad a c , id est 5. ita quadratum ex e f , ad quadratum ex f g sit autem 9. maior, quam

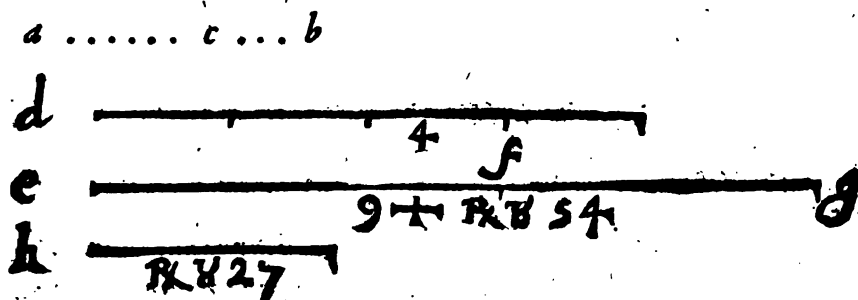
X

5. erit $\&$ quadratum ex e f , maius, quàm quadratum ex f g , sit maius quadrato rectæ h , ex lem-
mate Clauij propof. 14. lib. huius. Igitur facillimè demonstrabimus, vt in propof. 49. lib. huius
rectas h , $\&$ e f , esse longitudine commensurabiles: Quoniam verò maius nomen e f , plus potest,
quàm minus quadrato rectæ h , sibi commensurabilis longitudine, sitque tam e f , quàm f g . Ra-
tionali d , exposita incommensurabilis longitudine, erit e g , ex definitione tertia, secundarum defi-
nitionum ex binis nominibus tertia. Inuenta est ergo ex binis nominibus tertia. Quod erat facien-
dum.

Probl. 16. Propof. 52.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris a c , c b , id est 6, $\&$ 3, ita vt ex illis compositus nimirum 9.
ad neutrum ipforum rationem habeat quam quadratus numerus ad numerum quadratum ex
ius, quæ Clauius tradidit scholio 3. propof. 29. lib. huius. Exponatur deinde Rationalis quadam d ,
cui sumatur alia e f , ei longitudine commensurabilis, erit $\&$ e f , Rationalis. Si verò reliqua con-
struantur vt in propof. 49. huius lib. demonstrabimus vt ibi, totam e g , esse ex binis nominibus.



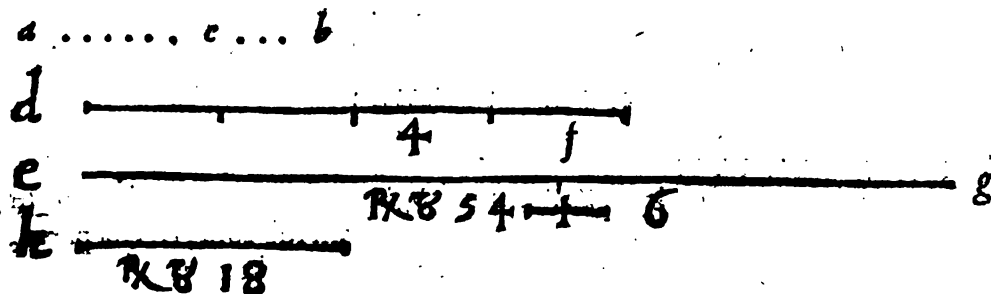
Dico $\&$ quartam esse. Nam vt in propof. 49. lib. huius, erit quadratum ex e f , maius, quàm
quadratum ex f g , Sit igitur maius quadrato rectæ h , Igitur vt iam demonstrauimus in propof.
49. cum sit per conuersionem rationis, vt a b , ad c b , id est vt 9. ad 3. ita quadratum ex e f , ad
quadratum ex h , Non est autem 9. ad 3. eadem ratio, quæ numeri quadrati ad numerum qua-
dratum, igitur nec quadratum ex e f , ad quadratum ex h , eandem habebit proportionem, quam
numerus quadratus ad numerum quadratum habet. Quare rectæ e f , $\&$ h , longitudine sunt in-
commensurabiles, vt vult 9. propof. lib. huius. Cum igitur maius nomen e f , plus possit, quàm mi-
nus f g , quadrato rectæ h , sibi incommensurabilis longitudine, sitque maius nomen Rationali d ,
exposita longitudine commensurable, erit ex definitione quarta, secundarum definitionum rectæ
 e g , ex binis nominibus quarta. Inuenta est ergo ex binis nominibus quarta. Quod erat facien-
dum.

Probl. 17. Propof. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris a c , c b , Ita vt compositus ex illis, ad neutrum ipforum ha-
beat rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, $\&$ reliqua construantur vt
in propof. 50. lib. huius, ostendemus, vt in 50. illa propof. rectam e g , esse ex binis nominibus. Di-
co $\&$ quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo vt in illa 50. propof. quadratum ex e f ,
maius esse quadrato f g . Sit igitur maius quadrato rectæ h , ex lemmate Clauij propof. 14. lib.

huius. Igitur cum in propof. 49. ostensum fit esse per conuersionem rationis ut $a b$, ad $c b$, id est 9 ad 3. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , Demonstrabimus ut in antecedenti rectas

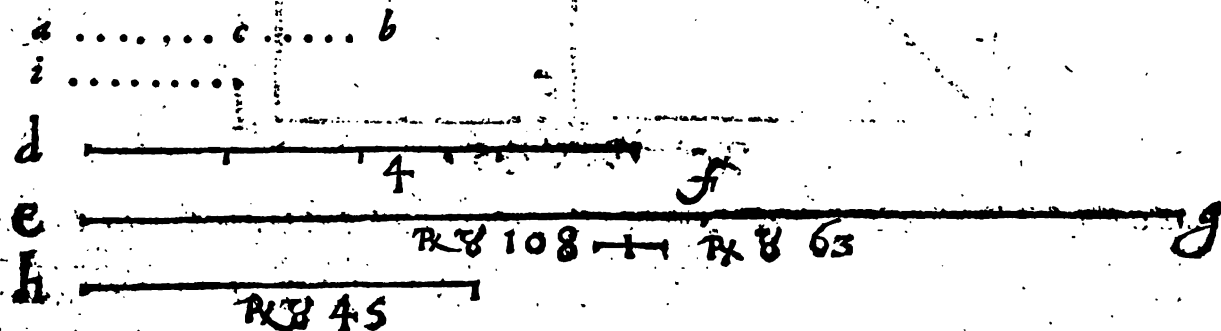


$e f$, & h , esse longitudine inter se incommensurabiles. Quocirca cum maius nomen $e f$, plus possit, quam minus $f g$, quadrato recte h , sibi longitudine incommensurabilis, sitque minus nomen Rationali d , exposita longitudine commensurable, erit ex definitione quinta, secundarum definitionum recta $e g$, ex binis nominibus quinta. Inuenta est ergo ex binis nominibus quinta. Quod erat faciendum.

Probl. 18. Propof. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTI \$ duobus numeris $a c b$, id est 7. & 5. plani non similes, quorum neuter quadratus sit, nec etiam compositus ex ipsis 12. sit quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadrati numeri, quod fiet si numerus quilibet quadratus sit diuisus in numeros primos inter se. Hac etenim ratione, totus ad utrumque ipsorum erit primus ex 30. propof. lib. 7. atque idcirco non habebit ad illos proportionem quadratorum, ut dicitur Clavius ad si-

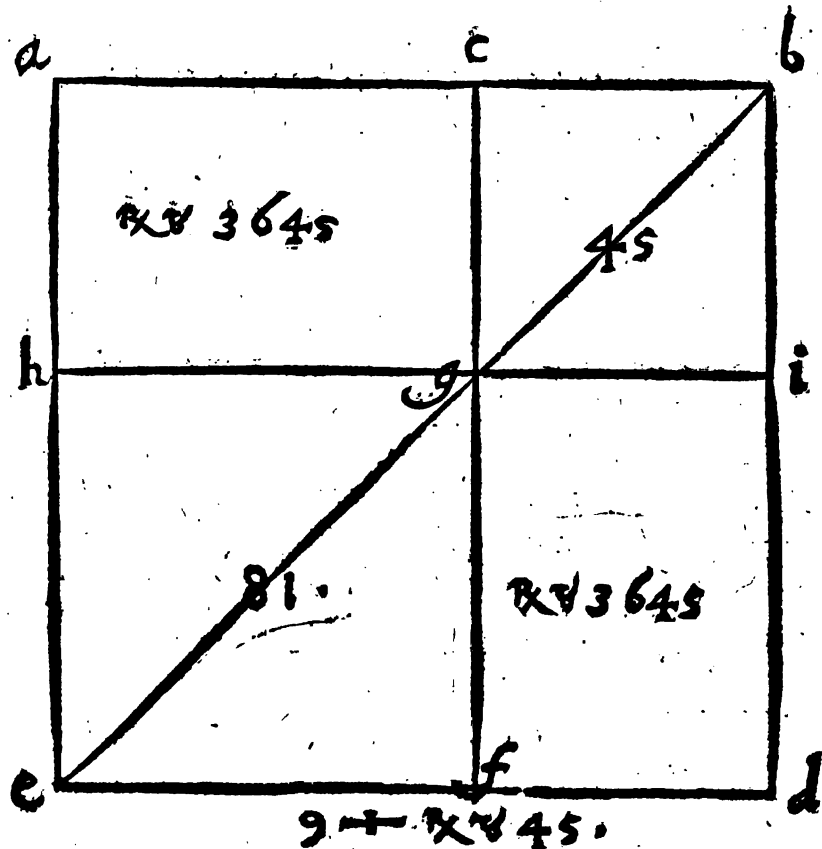


nem libri 8. Sumatur deinde quicumque numerus i , id est 9, qui nec ad 12, nec ad 7. habeat rationem, quam numeri quadrati habent qualis est quius numerus quadratus, ille enim non habebit ad non quadratos 12, & 7. rationem quadratorum numerorum. Exponatur Rationalis d , fiatque ut 9. ad 12. ita quadratum ex d , ad quadratum ex $e f$, ex coroll. Clauij propof. 6. lib. huius, & reliqua construantur ut in propof. 51. huius lib. Demonstrabimus igitur ut ibi rectas d , & $e f$, esse longitudine incommensurabiles, Atque adeo totam $e g$, esse ex binis nominibus. Dico & sextam esse. Similiter ut in propof. 51. lib. huius demonstrabimus rectas d , & $f g$, esse longitudine incommensurabiles, esseque quadratum ex $e f$, maius quadrato $f g$, quadrato recte h . Quare etiam propofitione 49. fit ostensum esse per conuersionem rationis, ut $a b$, ad $c b$, id est, 12. ad 5. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , Non habent autem 12. & 5. rationem quadratorum numerorum, nec etiam quadrata ex $e f$, & h , erunt ideo recta $e f$, & h , longitudine in-

commensurabiles, ut constat ex 9. propof. lib. huius. Igitur cum maius nomen $e f$, plus possit, quam minus $f g$, quadrato rectæ b , sibi longitudine incommensurabilis, neutrumque ipsorum nominum Rationali d , expressa longitudine sit commensurabile, erit tota $e g$, ex sexta definitione, secundarum definitionum ex binis nominibus sexta. Inventa est ergo, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA CLAVIL

Si recta linea secta sit utcumque erit rectangulum sub partibus contentum medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.



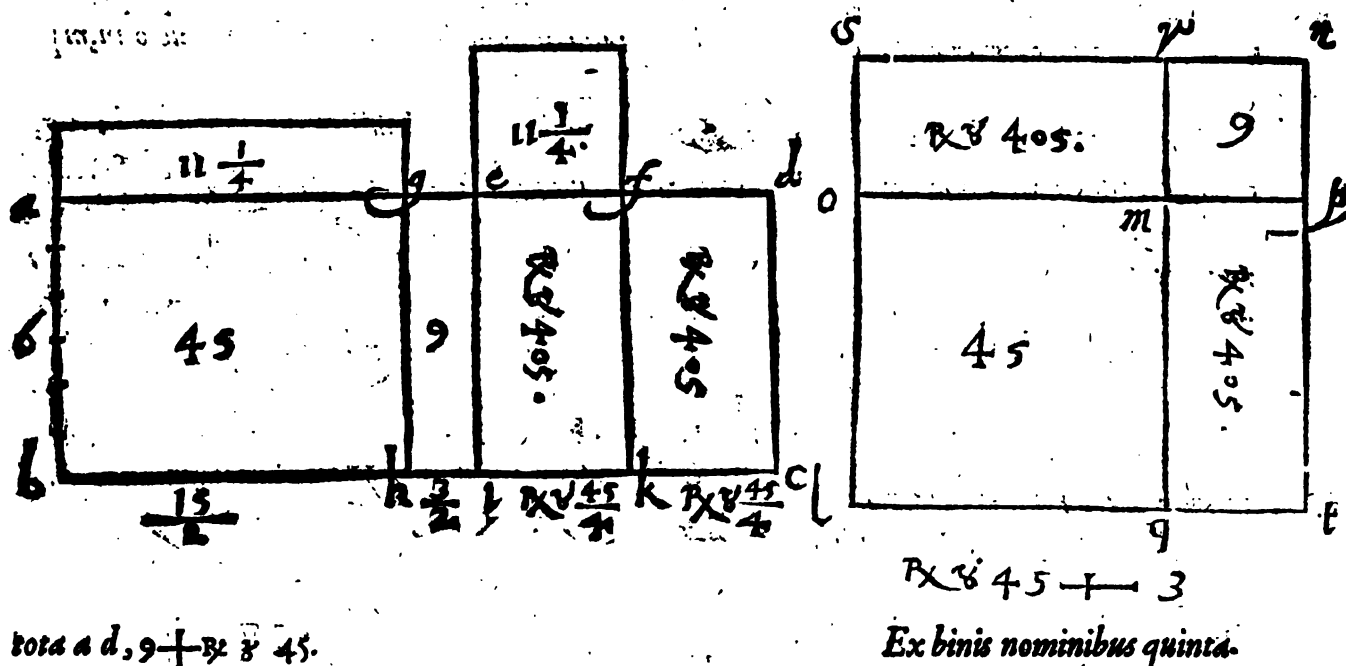
SECTA sit $a b$, utcumque in c . Describatur ex $a b$, quadratum $a b d e$, in quo diameter ducatur $b e$. Ducta autem ex c , recta $c f$, ipsi $b d$, parallela, qua diametrum secet in g , agatur per g , ipsi $a b$, parallela $h i$. Erunt igitur per coroll. propof. 4. lib. 2. $f h, c i$, quadrata partium $a c, c b$, utrumque autem rectangulum $d g, g a$, comprehensum eisdem partibus: At verò rectangula $c d, a i$, sub tota $a b$, & parte $c b$, contenta. Dico $d g$, medium proportionale esse inter quadrata $f h, c i$; At $c d$, medium esse proportionale inter quadrata $a d, c i$. Quoniam enim ut $h g$, ad $g i$, ita est tam $f h$, ad $d g$, quam $a g$, ad $c i$, erit ut $f h$, ad $d g$, ita $a g$, ad $c i$. Est autem $a g$, ipsi $d g$, æquale. Igitur erit quoque ut $f h$, ad $d g$, ita $d g$, ad $c i$. Atque adeò $d g$, medium proportionale est inter quadrata $f h, c i$. Rursus quia est ut $a b$, ad $c b$, ita tam $a d$, ad $c d$, quam $a i$, ad $c i$, erit ut $a d$, ad $c d$, ita $a i$, ad $c i$. Est autem $a i$, ipsi $c d$, æquale. Igitur erit ut $a d$, ad $c d$, ita quoque $c d$, ad $c i$. Quare $c d$, medium proportionale est inter quadrata $a d, c i$. Eodem modo erit $a f$, medium proportionale inter quadrata $a d, f h$.

Theor. 37. Propof. 55.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CON-

CONTINEATUR spatium a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus prima a d, Dico rectam, quae spatium a c, potest, esse Irrationalem, quae ex binis nominibus dicitur. Sit enim ipsius a d, maius nomen a e, erunt igitur a e, e d, Rationales, & solum potentia commensurabiles, & maius nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, & denique maius nomen a e, Rationali exposita longitudine erit commensurabile, ex definitione prima secundarum definitionum. Secetur minus nomen e d, bifariam in puncto f, igitur cum maius nomen a e, plus possit, quam minus e d, quadrato rectae sibi longitu-



dine commensurabilis, si quarta parti quadrati ex minori linea c d, descripti aequale parallelogrammum applicetur ad maiorem a e, deficiens figura quadrata, in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet, ut constat ex 18. propos. lib. huius. Quare partes a g, g e, inter se sunt longitudine commensurabiles, Ducantur iam per puncta g, e, f, ipsis a b, d c, parallela recta g h, e i, f k, & parallelogrammo a h, aequale describatur quadratum l m: At parallelogrammo g i, aequale sit quadratum m n, sintque quadrata illa ita coniuncta ad angulum m, ut latera m o, m p, vnam tantum rectam lineam constituent nimirum o p, facient etiam & latera q m, m r, vnam rectam q r, ut ex Proclo demonstravit Clavius propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli o m q, p m r, sunt ad verticem m, aequales, nimirum recti, completo deinde rectangulo l n, cum recta o m, m p, rectis q m, m r, aequales sint, Ideoque & tota o p, toti q r, Sit autem o p, ipsis f n, l t, & q r, ipsis l s, t n, aequalis, aequilaterum erit, rectangulum l n, ideoque quadratum, ut constat ex 34. lib. primi. Nunc vero quoniam rectangulum sub a g, g e, aequale est ex constructione quadrato ex e f, erit ut a g, ad e f, ita e f, ad g e, ex 17. propos. lib. 6. cum tres illae sint continue proportionales, Atque adeo per 1. propos. lib. 6. ut a h, ad e k, ita e k, ad g i. Quare rectangulum e k, medium proportionale est, inter rectangula a h, g i, id est inter quadrata l m, m n, quae illi sunt aequalia. Sed inter quadrata l m, m n, medium est proportionale rectangulum t m, ex lemmate Clavi propof. antecedentis. Igitur rectangulum t m, aequale est rectangulo e k. Cum autem rectangulo t m, aequale sit rectangulum m s, & rectangulo e k, aequale sit rectangulum f c, erit & rectangulum m s, rectangulo f c, aequale, ut colligitur ex 43. propos. lib. 1. & ex 36. eiusdem. Quare totum quadratum l n, toti rectangulo a c, aequale est, Atque adeo recta

Y

$o p$, potest spatium contentum sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus prima $a d$, nimirum rectangulum $a c$. Dico rectam $o p$, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim rectæ $a g, g e$, sunt ostensa longitudine commensurabiles, erit tota $a e$, utriusque ipsarum longitudine commensurabilis, ex 16. propos. lib. huius. Quare cum iam maius nomen $a e$, Rationali exposita $a b$, ostensam sit longitudine commensurabile, erunt & $a e, g e$, eidem Rationali $a b$, longitudine commensurabiles ex scholio Clavij propos. 12. lib. huius. Atque idcirco cum recta $a b$, sit Rationalis, erunt & $a g, g e$, Rationales. Igitur rectangula $a b, g e$, contenta sub Rationalibus longitudine inter se commensurabilibus, Rationalia sunt, ex 20. propos. lib. huius. Atque adeo, & quadrata $l m, m n$, illis equalia, Rationalia erunt, recta quoque $o m, m p$, Rationales.

Quoniam vero recta $a e$, recta $e d$, incommensurabilis est longitudine, sit autem recta $a g$, ostensa commensurabilis longitudine rectæ $a e$, & ipsi $e d$, longitudine sit commensurabilis recta $e f$, cum sit eius dimidia, erunt ex scholio Clavij propos. 14. lib. huius rectæ $a g, e f$, longitudine inter se incommensurabiles, rectangula etiam $a b, e f$, eandem proportionem habentia, quam rectæ $a g, e f$, incommensurabilia sunt, ut vult 1. propos. lib. 6. ac proinde & quadratum $l m$, & rectangulum $m t$, illis equalia incommensurabilia. Quare rectæ $a m, m p$, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem proportionem habeant, quam rectangula $l m, m t$, sunt autem rectæ $o m, m p$, Rationales ostensa, Rationales igitur sunt $o m, m p$, & solum potentia commensurabiles. Quapropter tota $o p$, potens spatium $a c$, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium igitur contineatur sub Rationali, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 38. Propos. 56.

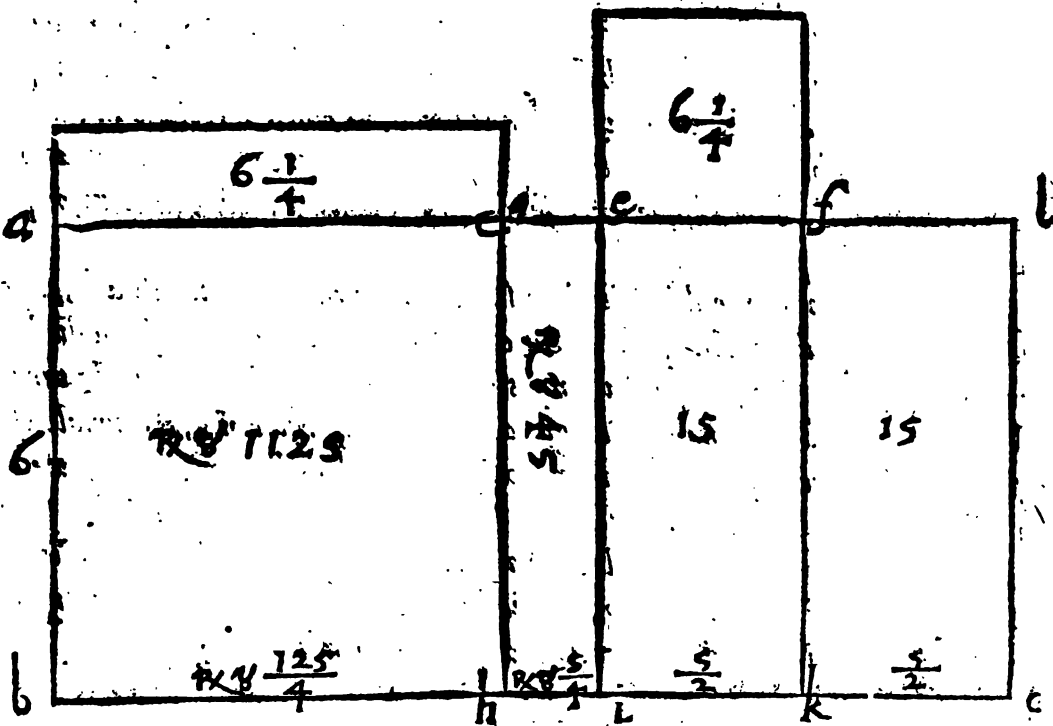
Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATUR spatium $a c$, sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus secunda $a d$. Dico rectam, quæ spatium $a c$, potest, esse Irrationalem, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit ipsius $a d$, maius nomen $a e$, erunt igitur $a e, e d$, Rationales, & solum potentia commensurabiles, & maius nomen $a e$, plus poterit, quam minus $e d$, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, & denique minus nomen $e d$, Rationali $a b$, expositæ longitudine erit commensurabile. Secetur $e d$, bifariam in puncto f , & reliqua construantur ut in precedenti propositione. Quo facto demonstrabimus ut ibi rectam $o p$, posse spatium $a c$, contentum sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus secunda $a d$. Dico $o p$, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

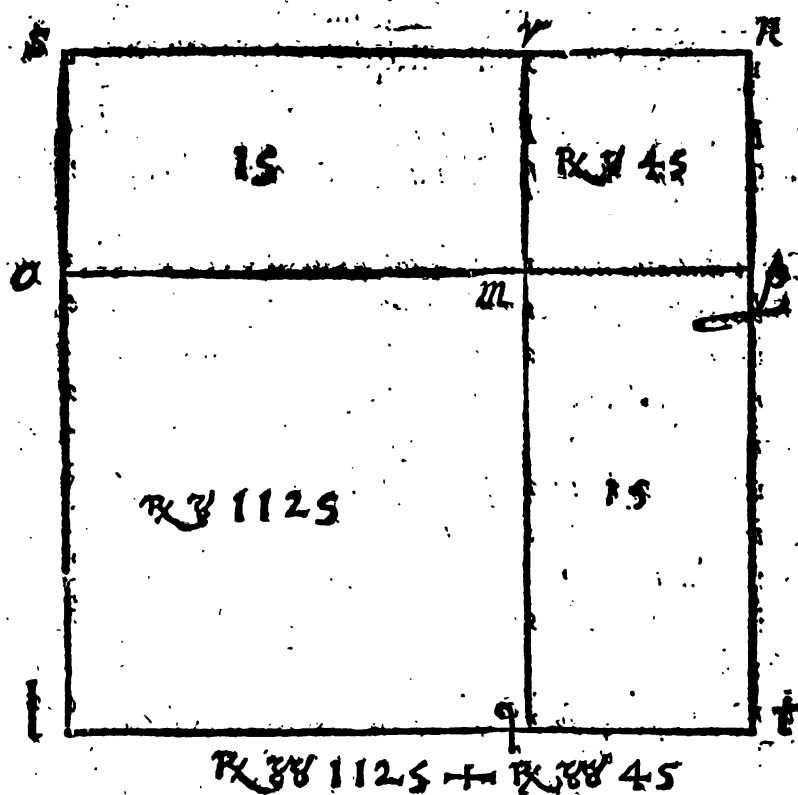
Quoniam enim $a e, e d$, sunt longitudine incommensurabiles, sitque $e d$, longitudine commensurabilis Rationali $a b$, exposita, erunt ex 13. propos. lib. huius rectæ $a e, e b$, longitudine incommensurabiles, & quoniam rectæ $a g, g e$, in antecedenti propositione ostensa sunt longitudine commensurabiles, erit tota $a e$, utrique ipsarum commensurabilis longitudine, ut vult 16. propos. huius lib. Igitur cum maius nomen $a e$, sit Rationale, erunt $a g, g e$, Rationales. Cum autem utraque $a g, g e$, longitudine sit commensurabilis ipsi $a e$, sit vero $a e$, incommensurabilis longitudine Rationali $a b$, exposita, erunt $a g, g e$, eidem Rationali $a b$, incommensurabiles longitudine, Quare tam $a b$, & $a g$, quam $a b, g e$, erunt Rationales solum potentia commensura-

ELEMENTVM DECIMVM.

biles, & ideo rectangula $a h, g i$, contenta sub Rationalibus. potentia tantum commensurabili-
bus, Media erunt, ut colligitur ex 22. propos. lib. huius, & propterea quadrata $l m, m n$, illis



total a d 12 3 45 + 5.



Ex hinc Medium prima.

æqualia, Media, Recta quoque o m, m p, Media sunt. Quoniam verò recta a g g e, longitudine commensurabiles demonstratae sunt, erunt & rectangula a h g i, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata l m, m n, illis æqualia commensura-

bilia sunt, Rectæ quoque $o m, m p$, saltem potentia commensurabiles. Cum autem $a e$, & $e d$, sint inter se longitudine incommensurabiles, ipsi verò $a e$, ostensa sit commensurabilis longitudine $a g$, & ipsi $e d$, longitudine sit commensurabilis $e f$, eius dimidia, erunt ex scholio propof. 14. lib. huius à Clauio tradito rectæ $a g, e f$, incommensurabiles longitudine, ac propterea rectangula $a h, e k$, eandem cum illis proportionem habentia incommensurabilia, ut docet 10. propof. lib. huius. Igitur $l m, m t$, ipsis $a h, e k$, equalia incommensurabilia sunt, & rectæ $o m, m p$, eandem inter se proportionem habentes longitudine incommensurabiles. Cum autem rectæ $o m, m p$, Medias esse iam sit ostensum, easque inter se commensurabiles, erunt rectæ $o m, m p$, Medie solùm commensurabiles potentia.

Rursus cum minus nomen $e d$, longitudine sit commensurabile Rationali $a b$, exposita, vel Rationali $e i$, quæ equalis existit ipsi $a b$, Sit etiam $e f$, ipsi $e i$, commensurabilis longitudine cum sit dimidia ipsius $e d$, sitque $e i$, Rationalis, erit & rectæ $e f$, Rationalis. Igitur rectangulum $e k$, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est; ut vult 20. propof. lib. huius. Rectangulum autem $m t$, contentum sub rectis $o m, m p$, equalis est rectangulo $e i, e f$, contento. Igitur & $m t$, Rationale est. Quapropter $o m, m p$, Medie sunt potentia commensurabiles tantum, quæ Rationalè continent, Atque ideo & tota $o p$, Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, ut vult 38. propof. lib. huius. Si spatium igitur contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, & c. Quod erat ostendendum.

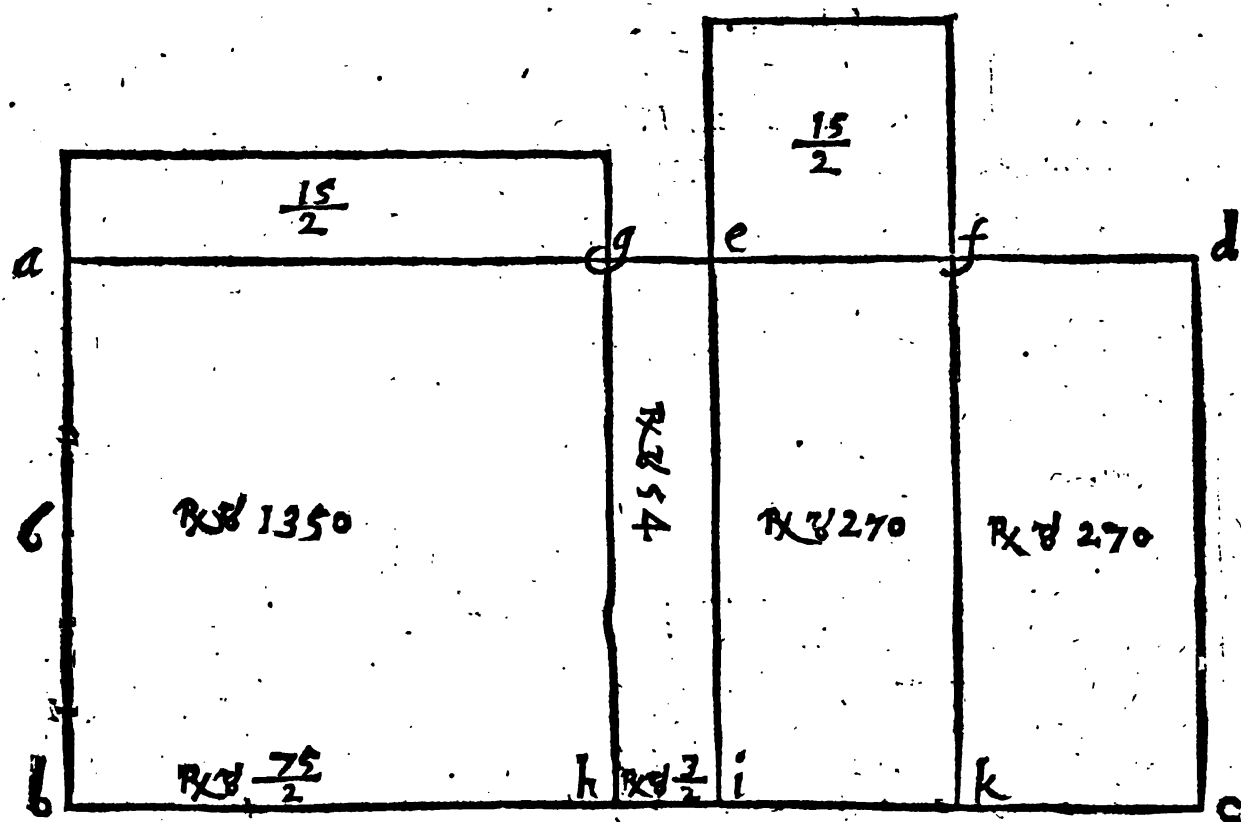
Theor. 39. Propof. 57.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertiâ; Rectæ lineæ spatium potens, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

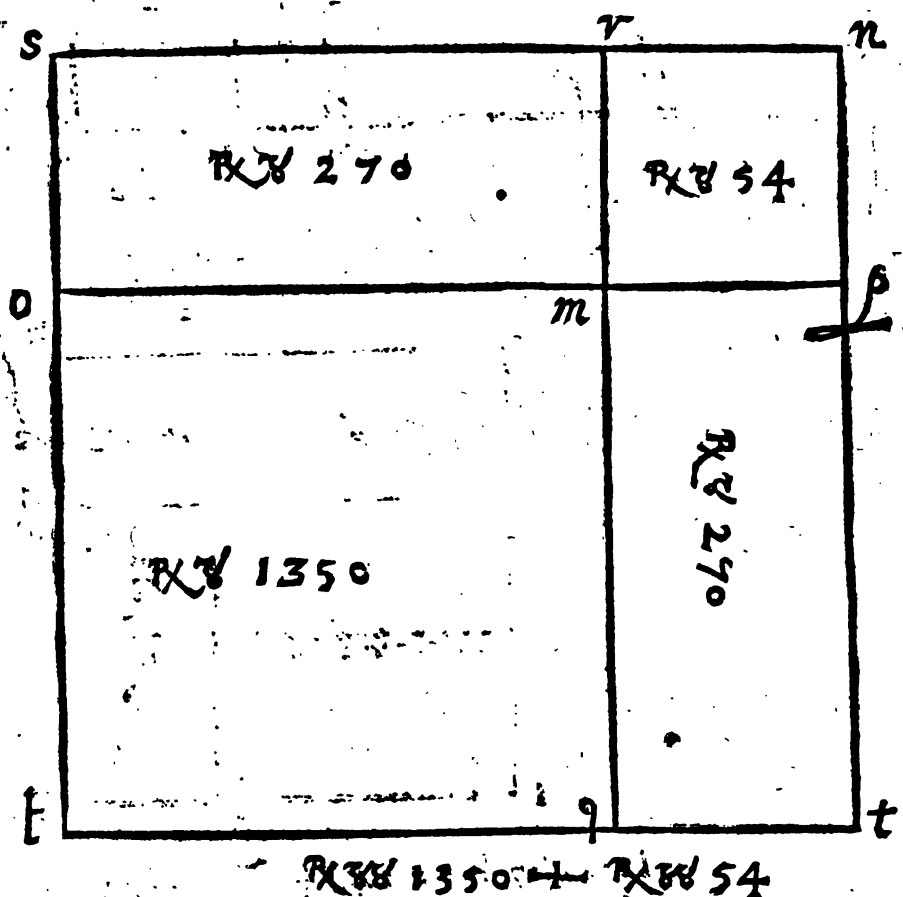
CONTINEATUR spatium $a c$, sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus tertiâ $a d$. Dico rectam, quæ potest spatium $a c$, esse Irrationalem, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

Sit ipsæ $a d$, maius nomen $a e$, Erunt igitur $a e$, & $e d$, Rationales, & solùm potentia commensurabiles, & maius nomen $a e$, plus poterit, quàm minus $e d$, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & denique neutra ipsarum $a e, e d$, Rationali $a b$, exposita longitudine erit commensurabilis, ut constat ex definitione tertiâ secundarum definitionum. Secetur minus nomen $e d$, bifariam in f , & reliqua construantur, ut in propositione antecedenti. Igitur ut ibi demonstrabimus rectam $o p$, posse spatium contentum sub Rationali $a b$, & ex binis nominibus tertiâ $a d$. Similiter ostendemus ut in antecedenti propositione rectas $o m, m p$, Medias esse, quæ tantum potentia sunt commensurabiles, cum $a e$, Rationali $a b$, sit ex hypothesi longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem $a e$, Rationali $a b$, longitudine erit incommensurabilis.

Quoniam verò $e d$, & $e f$, longitudine sunt commensurabiles cum $e f$, sit dimidia ipsius $e d$, sitque $e d$, Rationali $a b$, longitudine incommensurabilis, ac propterea & $e i$, quæ equalis est ipsi $a b$, erunt rectæ $e f, e i$, longitudine incommensurabiles, ut constat ex 14. propof. lib. huius. Sunt autem Rationales $e f, e i$, cum $e f$, sit dimidia ipsius $e d$, quæ Rationalis est & $e i$, Rationali $a b$, equalis, Quare rectæ $e f, e i$, Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles; Idcirco rectangulum $e k$, contentum sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, Medium est, ut vult 22. propof. lib. huius, ac propterea & rectangulum $m t$, illi aqua-



$i k, R \propto 3$
 $k c, R \propto 3$



$R \propto 1350 + R \propto 54$

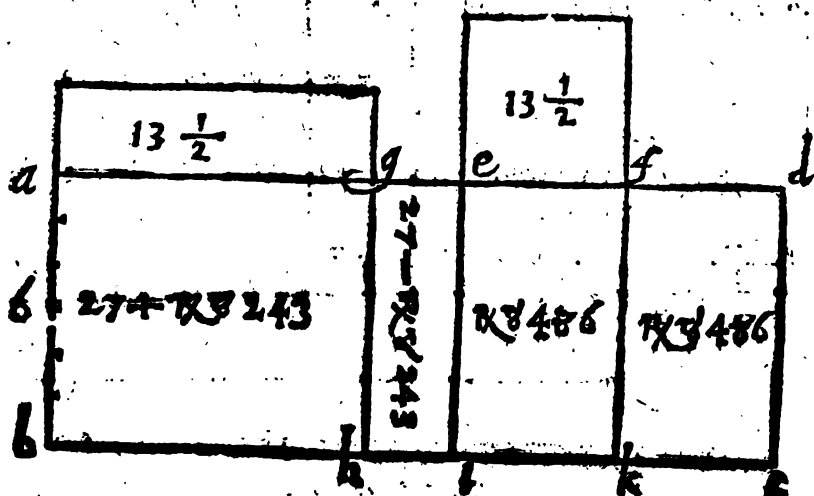
le, Medium, & contentum sub duabus Mediis a m, m p. Igitur cum o m, m p, Mediae sint, & solum potentia commensurabiles, quae Medium continent, erit tota o p. Irrationalis, quae ex binis Mediis secunda dicitur, de vult 39. propo lib. huius. Si spatium igitur contineatur sub Rationali, &c. Quod erat ostendendum.

Z

Theor. 40. Propos. 58.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

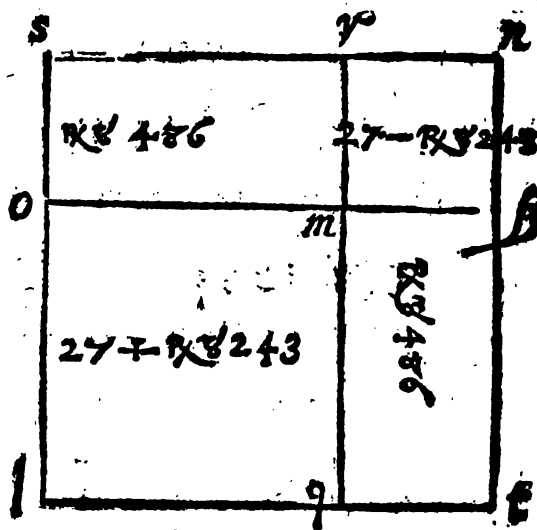
CONTINEATUR spatium a c sub Rationali a b, & ex binis nominibus quarta a d, Dico rectam, quæ spatium a c potest Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Sit ipsius a d, maius nomen a e, minus verò e d, erunt igitur rectæ a e, e d, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen a e, plus poterit, quàm minus e d, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, & denique maius nomen a e, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabile.



Tota a d, $9 + 27 + 81 + 243$

b b $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

b i $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}$



$1 + 27 + 243 + 27 + 243 + 27 + 243 + 27 + 243$

Tota superficies quadrati erit $54 + 27 + 243$.

Compositum quadratorum erit 34.

SECETUR e d, bisariam in puncto f, & reliqua omnia fiant ut in propof. 55. Erant

igitur rectæ a, g, g, e , longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propof. lib. huius. Similiter demonstrabimus ut ibi rectam o, p , posse spatium a, c , contentum sub Rationali a, b , & ex nominibus quarta a, d . Dico rectam o, p , esse Irrationalem, quæ Maior appellatur. Cum enim a, g, g, e , longitudine sint incommensurabiles, erunt rectangula a, h, g, t , eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia, ut docet 10. propof. libri huius. Quadrata quoque l, m, m, n , illis æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ o, m, m, p , potentia sunt incommensurabiles, ut constat ex 4. defin. lib. huius.

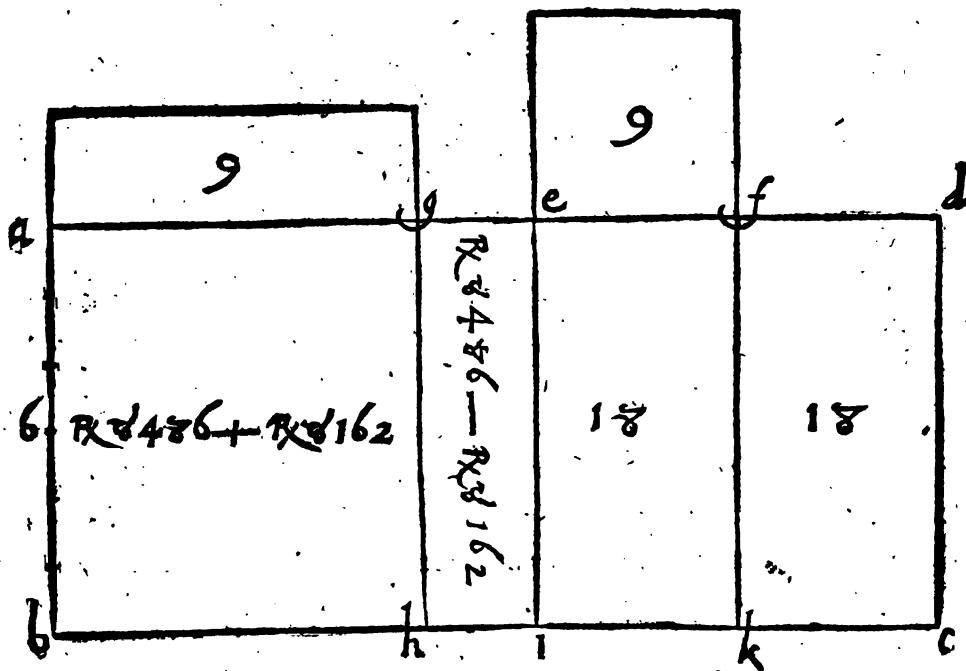
Quoniam verò recta a, e , nimirum maius nomen rectæ a, d , ex binis nominibus quarta, Rationali a, b , longitudine est commensurabilis, ut prædictum est, erit & a, e , Rationalis, & rectangulum a, i , contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale erit, ut vult 20. propof. libri huius. Rectangulum verò a, i , æquale est compositum ex rectarum quadratis l, m, m, n . Quare compositum ex rectarum quadratis l, m, m, n , spatium Rationale est.

Quoniam verò minus nomen e, d , Rationali a, b , expofita longitudine est incommensurabile, erit & e, f , eidem a, b , longitudine incommensurabilis, cum sit dimidia ipsius e, d . Est autem e, f , Rationalis, eum Rationali e, d , sit commensurabilis. Quare rectæ e, f, a, b , sunt tantum potentia commensurabiles, & rectangulum sub ipsis contentum, nimirum e, k , Medium erit, ut vult 22. propof. lib. huius, ac propterea & rectangulum m, t , illi æquale, Medium. Igitur cum o, m, m, p , Media sint, & potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, tota o, p , Irrationalis erit, quæ Maior dicitur, ut vult propof. 40. lib. huius. Si spatium igitur contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 41. Propof. 59.

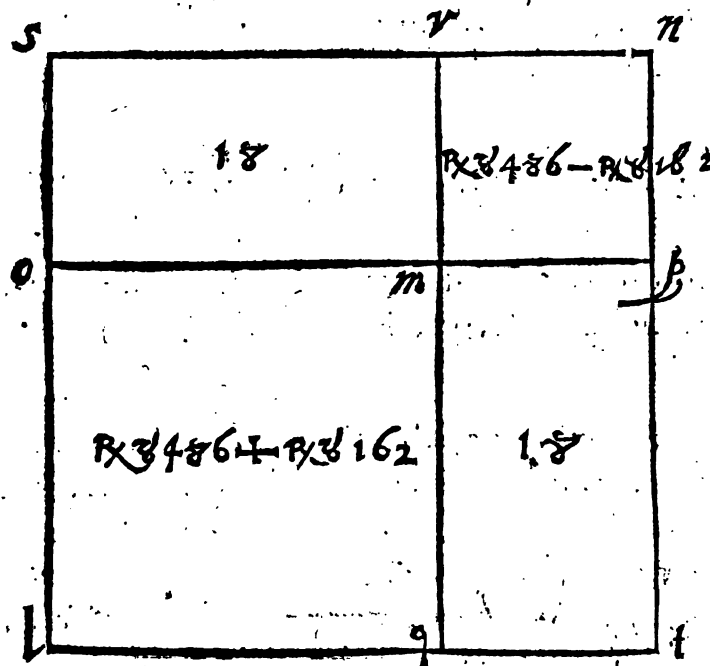
Si spatium contineatur sub Rationali & ex binis nominibus quinta, Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATUR spatium a, c , sub Rationali a, b , & ex binis nominibus quinta a, d . Dico rectam, quæ potest spatium a, c , Irrationalem esse, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Sit ipsius a, d , maius nomen a, e , erunt igitur rectæ a, e, e, d , Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen a, e , plus poterit, quam minus e, d , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, & denique minus nomen e, d , Rationali a, b , expofita longitudine erit commensurabile, ut constat ex quinta definitione secundarum definitionum. Secetur minus nomen e, d , bifariam in f , & reliqua construantur, ut in propof. 55. erunt igitur a, g, g, e , longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propof. lib. huius. Similiter demonstrabimus ut ibi, rectam o, p , posse spatium a, c , contentum sub Rationali a, b , & ex binis nominibus quinta a, d . Dico Irrationalem esse, quæ Rationale, & Medium potens dicitur. Erunt enim rectæ a, e, e, d , Rationales, & quia a, e , est Rationalis, & Rationali a, b , expofita longitudine incommensurabilis, erunt rectæ a, e, a, b , Rationales, & solum potentia inter se commensurabiles. Quare rectangulum sub ipsis contentum, nimirum a, i , Medium erit, ut vult 22. propof. lib. huius. Rectangulum verò a, i , æquale est compositum ex rectarum quadratis l, m, m, n . Igitur compositum ex rectarum quadratis l, m, m, n , Medium est.



$$\text{Tot: } a \text{ ad, } R 486 + R 162.$$

$$b \text{ h, } R 486 + R 162 \quad b \text{ i, } R 486 - R 162$$



Compositum quadratorum
R 486 + R 162.

Tota superficies quadrati
R 486 + R 162 + 36.

$$l \text{ i, } R 486 + R 162 + R 486 - R 162.$$

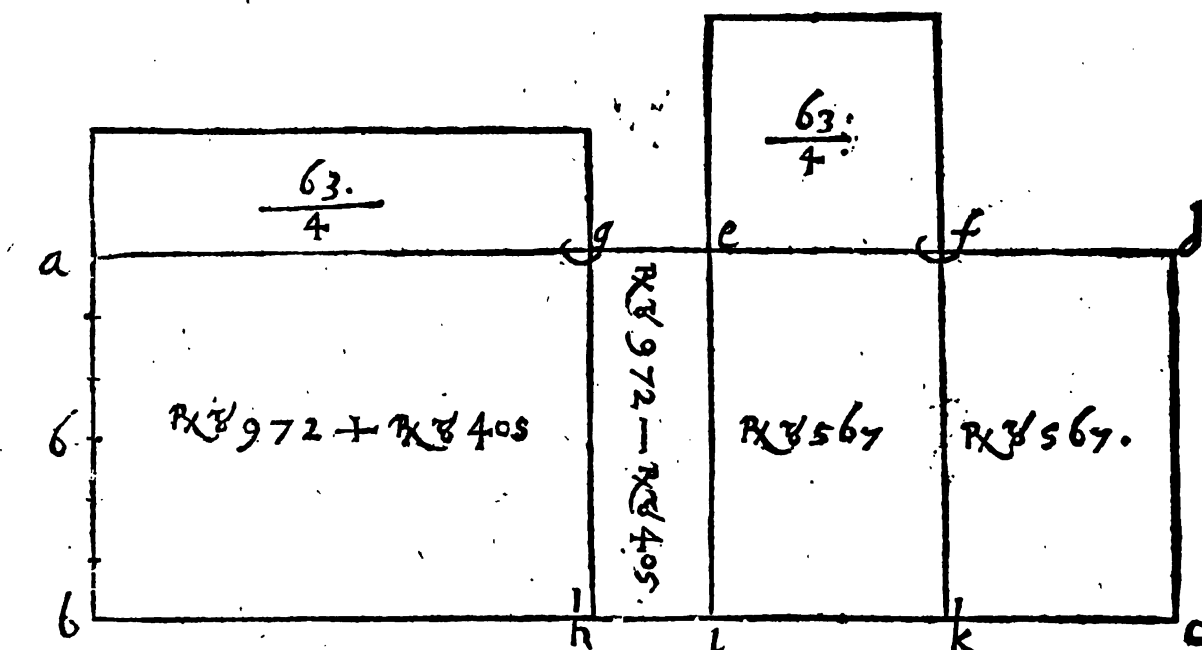
RVRSVS quia recta e d, id est minus nomen ipsius a d, Rationali a b, longitudine est commensurable. erit e f, eius dimidia eidem a b, vel e i, quae ipsi a b, aequalis est commensurabilis longitudine, et Rationalis. Quare rectangulum e k, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est, ut vult 20. propos. lib. huius, Atque idcirco e m i, illi aequale, Rationale. Continetur autem rectangulum m i, sub rectis o m, m p; Igitur cum recte o m, m p, sint potentia incommensurabiles, faciuntque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale, Tota o p, Irrationalis est, quae Rationa-

le, & Medium potens dicitur, ut vult 41. propof. lib. huius. Si spatium igitur contineatur sub Rationali & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat ostendendum.

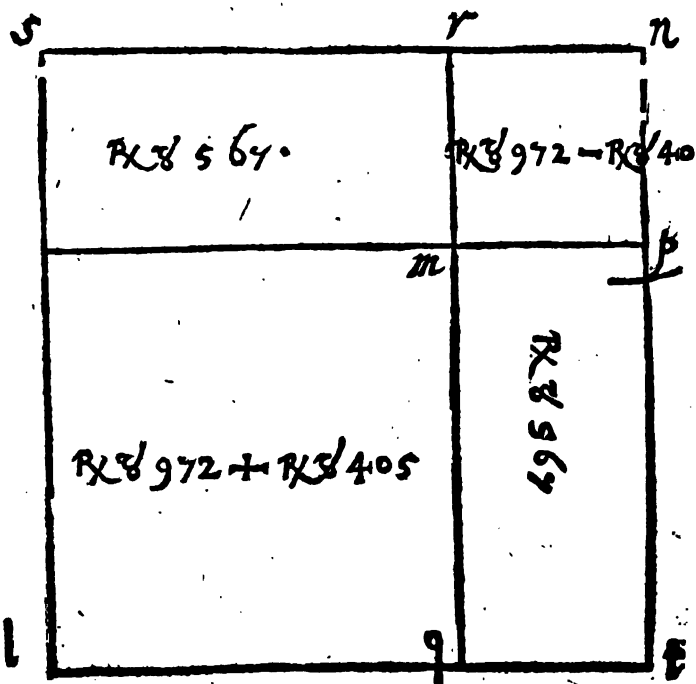
Theor. 42. Propof. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

CONTINEATUR spatium a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus sexta



Tota a d, & 108 + & 63. b h, & 108 + & 63. b i, & 108 + & 63.



Compositum quadratorum & 3888.
Tota superficies quadrati erit.
& 3888 + & 2268.

l s, & (& 972 + & 405) + & (& 972 - & 405)

a d, Dico rectam, quæ spatium a c, potest Irrationalem esse, quæ bina Media potens appella-

Aa

rit. Sit ipsius a d , maius nomen a e , minus verò e d , erunt igitur a e , e d , Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen a e , plus poterit, quam minus e d , quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, & denique neutrum ipsorum nominum a e , e d , Rationali a b , expostæ longitudine erit commensurabile, ut vult sexta definitio secundarum definitionum.

Secetur e d , bifariam in f , & reliqua construantur, ut in antecedentibus, erunt igitur rectæ a g , g e , longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius. Similiter ostendemus ut in propos. 55. rectam o p , posse spatium a c , contentum sub Rationali a b , & ex binis nominibus sexta a d ; Item pari ratione, qua vsi sumus propos. 58. rectæ o m , m p , erunt incommensurabiles potentia. Deinde ut in antecedenti propositione erit compositum ex rectarum quadratis l m , m n , Medium, & ut in propos. 58. demonstrauimus, erit etiam rectangulum m t , Medium, comprehensum sub rectis o m , m p .

Quoniam verò duarum rectarum a e , e f , illa quidem longitudine incommensurabilis est ipsi e d , hæc verò eidem longitudine commensurabilis, erunt rectæ a e , e f , incommensurabiles longitudine, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Igitur rectangula a i , e k , eandem cum illis proportionem habentia, sunt incommensurabilia, ut vult 10. propos. lib. huius. Quare compositum ex quadratis rectarum l m , m n , quod æquale est rectangulo a i , & rectangulum m t , quod ipsi e k , est æquale, incommensurabilia sunt. Continetur autem m t , sub o m , m p , Igitur cum rectæ o m , m p sint rectæ potentia incommensurabiles facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, tota o p , Irrationalis erit, quæ bina Media potens appellatur, ut vult propos. 42. lib. huius. Si spatium igitur contineatur, &c. Quod erat demonstrandum.

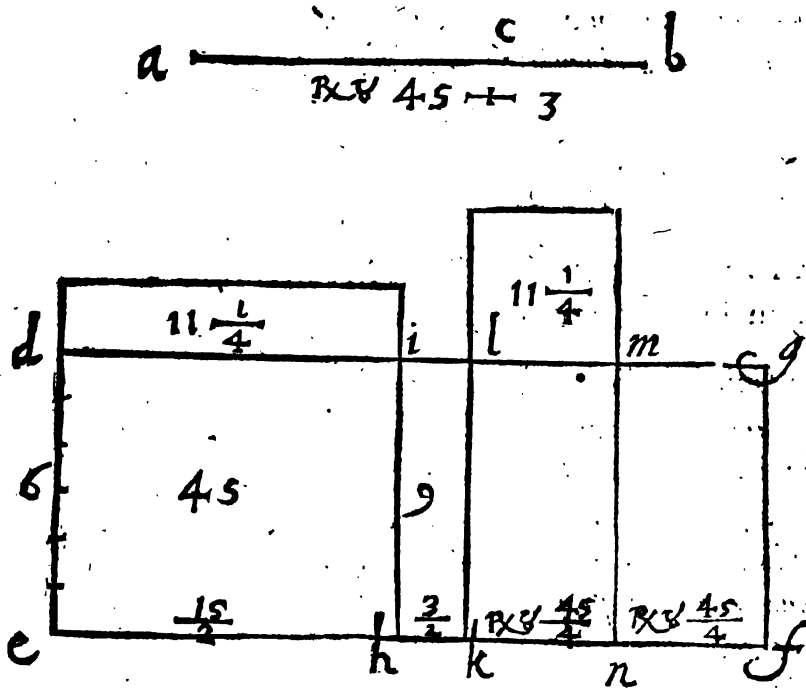
Theor. 43. Propos. 61.

QUADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT recta a b , ex binis nominibus nimirum vel prima, vel secunda, vel tertia, &c. & ad Rationalem d e , applicetur rectangulum d f , æquale quadrato ex a b , latitudinem faciens d g . Dico rectam d g , esse ex binis nominibus primam.

Applicetur ad eandem d e , rectangulum d h , quadrato ex a c , descripto æquale, & ad h i , quæ Rationali d e , est æqualis aliud rectangulum applicetur æquale quadrato c b , nimirum rectangulum i k , erit igitur rectangulum l f , æquale rectangulo bus sub a c , c b , comprehenso, cum quadrata ex a c , c b , una cum rectangulo ex a c , c b , bis contento æqualia sint quadrato ex a b , ut vult 4. propos. lib. 2. Quenadmodum & eidem quadrato ex constructione æquale est etiam rectangulum d f . Secetur l g , bifariam in puncto m , per quod rectis l k , g f , ducatur parallela m n , erit igitur utrumque rectangulum l n , m f , æquale rectangulo sub a c , c b , contento.

Quoniam verò a c , c b , sunt Rationales, & potentia inter se tantum commensurabiles ex hypothesis, erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia, Et quia compositum ex ipsarum quadratis a c , c b , quadratis ex a c , c b , descriptis commensurabile est, ut vult 16. propos. lib. huius, erit & compositum illud, Rationale. Rectangulum verò d k , ex constructione æquale est composito ex quadratis rectarum a c , c b . Igitur d k , Rationale erit. Quare cum rectangulum illud Rationale ad Rationalem d e , sit applicatum, latitudinem d l , faciet Rationalem, & ei Rationali d e , longitudine commensurabilem, ut vult 21. propos. libri huius.



Tota $d g, 9 \div R\& 45$.

$d f, 54 \div R\& 1620$.

RVRSVS cū a, c, b , Rationales sint potentia tantū inter se commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium, ut vult 22. propof. lib. huius, atque adeo & quod bis sub ipsis, cū ei sit commensurabile, hoc est, rectangulum $l f$, ut constat ex coroll. Clauij propof. 24. lib. huius. Quare rectangulum illud $l f$, (quod Medium est) ad Rationalem applicatum latitudinem faciet $l g$, Rationalem, eique Rationali $l k$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propof. lib. huius.

Est autem recta $d l$, ostensa eidem $d e$, longitudine commensurabilis, quare recta $d l, l g$, longitudine incommensurabiles sunt. Igitur $d l, l g$, Rationales sunt & tantū inter se potentia commensurabiles, ac propterea recta $d g$, ex binis nominibus est, ut vult 37. propof. lib. huius. Dico & primam esse.

Quoniam enim ex lemmate Clauij propof. 54. lib. huius rectangulum sub a, c, b , medium est proportionale inter quadrata ex a, c, b , erit quoque rectangulum $l n$, vel $m f$, medium proportionale inter rectangula $d h, i k$, Atque adeo cū recta $d i, l m, i l$, eandem habeant proportionem, quam rectangula $d h, l n, i k$, ut constat ex 1. propof. lib. 8. erit recta $l m$, media proportionalis inter $d i$, & $i l$, Igitur per 17. propof. lib. 6. quadratum ex $l m$, aequale est rectangulo sub $d i, l$, comprehenso.

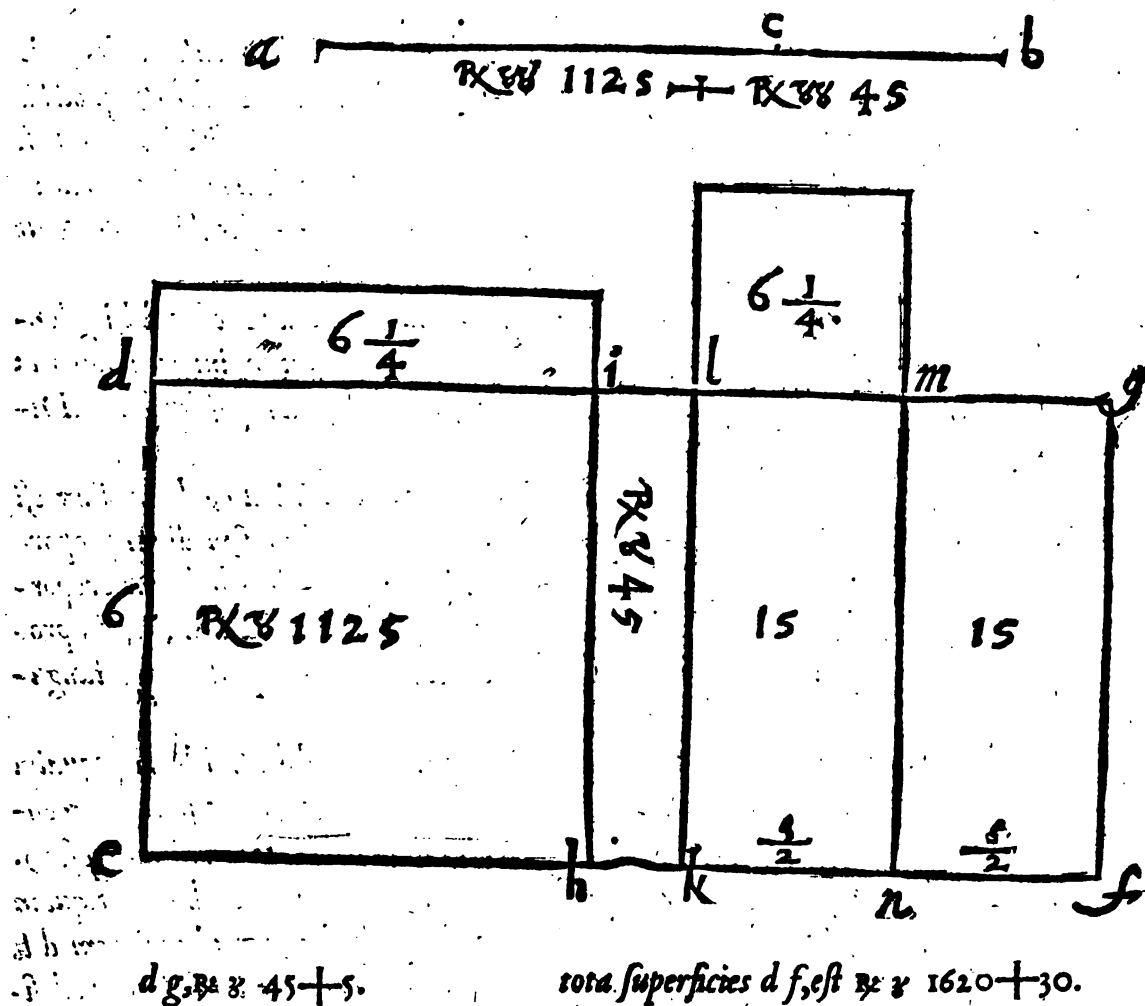
Quoniam verò quadrata ex a, c, b , sunt commensurabilia, erunt & $d h$, & $i k$, illis aequalia commensurabilia. Quare recta $d i, l$, eandem cum illis proportionem habentes sunt commensurabiles. Quia verò rectangulum $d k$, rectangulo $l f$, maius est ex lemmate Clauij propof. 19. lib. huius, erit & recta $d l$, maior, quā $l g$, cū recta $d l, l g$, eandem rationem habeant, quam rectangula $d k, l f$, ex 1. propof. lib. 6. Igitur cū $d l$, maior sit, quā $l g$, & ad maiorem $d l$, applicetur rectangulum sub $d i, l$, aequale quartæ parti quadrati ex minore $l g$, descripti, deficiensque figura quadrata, sitque $d l$, diuisa in partes longitudine commensurabiles ut ostensum fuit, poterit maior $d l$, plus, quā minor $l g$, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, ut constat ex 18. propof. lib. huius. Quare cū $d g$, sit ostensa ex binis nominibus, & maius no-

men ipsius $d g$, nempe $d l$, plus possit, quàm minus quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, & denique maius nomen $d l$, Rationali $d e$, longitudine sit commensurabile, erit recta $d g$, ex definitione prima secundarum definitionum ex binis nominibus prima. Quadratum ergo, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 44. Propos. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT $a b$, ex binis Mediis prima cuius maius nomen sit $a c$, & ad Rationalem $d e$, applicetur rectangulum $d f$, quadrato ex $a b$, æquale faciens latitudinem $d g$. Dico rectam $d g$, esse ex binis nominibus secundam. Construantur eadem, quæ in propos. precedenti, ita ut rectangula $d h, i k$, sint æqualia quadratis ex $a c, c b$, descriptis, & rectangula $l n, m f$, æqualia sint quoque rectangulis sub $a c, c b$, comprehensis. Igitur cum rectæ $a c, c b$, quæ ex binis Mediis primam componunt, sint ex 38. propos. lib. huius Mediae potentia tantum commensurabiles Rationale continentes, erunt quadrata ex $a c, c b$, Media, & inter se commensurabilia. Atque adeo & rectangula $d h, i k$, illis æqualia, Media, & inter se commensurabilia. Quare cum com-



positum ex rectarum quadratis $a c, c b$, tam quadrato ex $a c$, quàm quadrato ex $c b$, sit commensurabile, ut colligitur ex 16. propos. lib. huius, erit ex corollario Clavi propof. 24. lib. huius, com-

compositum illud, Medium, ac propterea & rectangulum $d k$, huic composito aequale, Medium.

Medium autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei Rationali ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. libri huius. Quare recta $d l$, recta $d e$, longitudine est incommensurabilis.

Rursus quoniam rectangulum sub $a c$, $c b$, Rationale est, eiusque duplum nimirum rectangulum $l f$, sitque $l f$, applicatum ad Rationalem $d e$, vel $l k$ illi aequale, latitudinem efficiet $l g$, Rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huius.

Igitur cum duarum rectarum $d l$, $l g$, illa sit Rationali $d e$, longitudine incommensurabilis, hæc verò commensurabilis longitudine, erunt rectæ $d l$, $l g$, longitudine inter se incommensurabiles, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Rationales tamen ostensa sunt $d l$, $l g$, Igitur Rationales, & potentia tantum commensurabiles sunt $d l$, $l g$. Ac propterea tota $d g$, ex binis nominibus, ut vult 37. propos. lib. huius. Dico & secundam esse.

Nam cum, ut in antecedenti propositione demonstrauius, maius nomen sit $d l$, & plus possit, quàm minus $l g$, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, minus verò $l g$, Rationali exposita sit commensurabile longitudine, erit $d g$, ex definitione secunda secundarum definitionum ex binis nominibus secunda. Quadratum igitur ad Rationalem, & c. Quod erat ostendendum.

Theor. 45. Propos. 63.

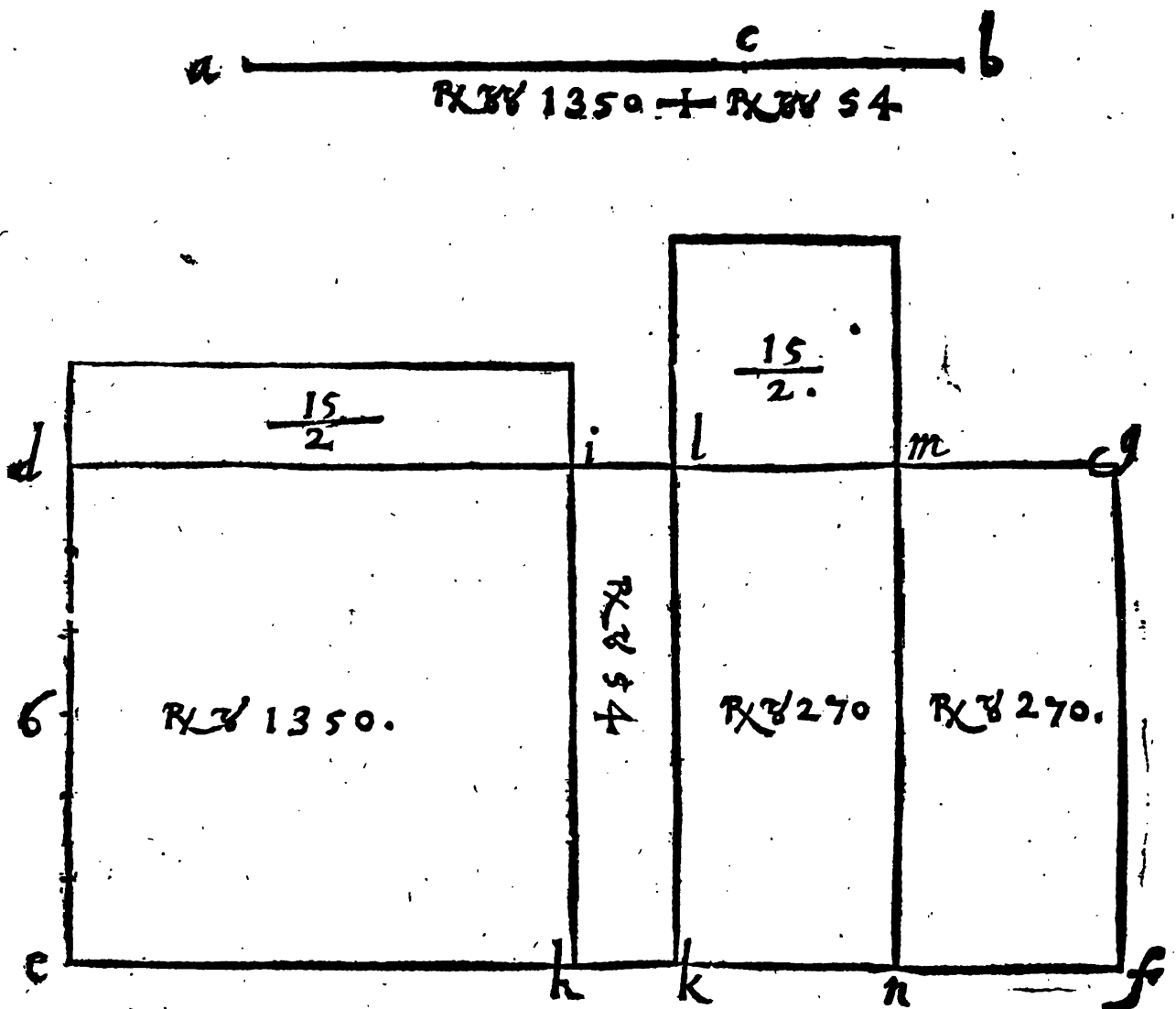
QUADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT recta $a b$, ex binis Mediis secunda, cuius maius nomen sit $a c$, & ad Rationalem $d e$, applicetur rectangulum $d f$, aequale quadrato ex $a b$, faciens latitudinem $d g$, Dico rectam $d g$, esse ex binis nominibus tertiam. Iisdem enim constructis, quæ in 61. propositione: Cum $a c$, $c b$, quæ rectam $a b$, componunt, Medie sint, potentia tantum commensurabiles, Medium continentes; erunt quadrata ex $a c$, $c b$, Media, & inter se commensurabilia, Compositum etiam quadratorum ex $a c$, $c b$, Medium, cum utriusque quadrato ex $a c$, $c b$, commensurabile sit, ac propterea & rectangulum $d k$, huic composito aequale, Medium erit, Rectangula igitur $d h$, $i k$, quæ equalia sunt quadratis ex $a c$, $c b$, Media erunt, & inter se commensurabilia.

Medium autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius: Quare latitudo $d l$, Rationalis est, & Rationali $d e$, expositæ longitudine incommensurabilis.

Rursus cum rectangulum sub $a c$, $c b$, ex hypothesi Medium sit, erit & eius duplum $l f$, Medium: cum igitur Medium $l f$, ad Rationalem sit applicatum, latitudinem faciet $l g$, Rationalem, sed Rationali $d e$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius. Quoniam verò $a c$, $c b$, longitudine sunt incommensurabiles ex hypothesi, sitque ut $a c$, ad $c b$, ita ex lemmate tertio Clavius propositionis 19. lib. huius, quadratum maiori ad rectangulum sub $a c$, $c b$, contentum, Erit quoque quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a c$, $c b$, contento incommensurabile ex 10. propos. lib. huius. Quadrato autem ex $a c$, descripto commensurabile est compositum ex rectarum quadratis $a c$, $c b$, ut iam antea fuit ostensum: Rectangulo verò sub $a c$, $c b$, com-

Bb



d g, $\text{RX } 54 + \text{RX } 30$. Tota superficies d f, erit $\text{RX } 1944 + \text{RX } 1080$.

prehensio commensurabile est, quod bis sub a c, c b, continetur. Quare compositum est rectarum quadratis a c, c b, nimirum rectangulum d k, illi aequale, incommensurabile est rectangulo bis sub a c, c b, comprehenso, nimirum rectangulo l f, ut manifestum est ex iis, quae Clavius tradidit in scholio, propositionis 14. libri huius. Igitur rectae d l, l g, eandem rationem inter se habentes, quam d k, l f, longitudine sunt inter se incommensurabiles, ut vult 1. sexti: Rationales tamen ostensa sunt rectae d l, l g, Igitur Rationales sunt d l, l g, & tantum potentia commensurabiles, recta quoque d g, ex illis duabus composita Irrationalis quae ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propositio huius libri.

Iam verò demonstrabimus, ut in propositione 61. rectam d l, esse maius nomen, & plus posse, quàm minus quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis: Quare cum maius nomen d l, plus possit, quàm minus l g, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, & neutrum ipsorum nominum Rationali d e, longitudine sit commensurabile, erit recta d g, ex illis duabus d l, l g, composita, ex binis nominibus tertia, ut vult tertia definitio secundarum definitionum lib. huius. Quadratum ergo, &c. Quod erat ostendendum.

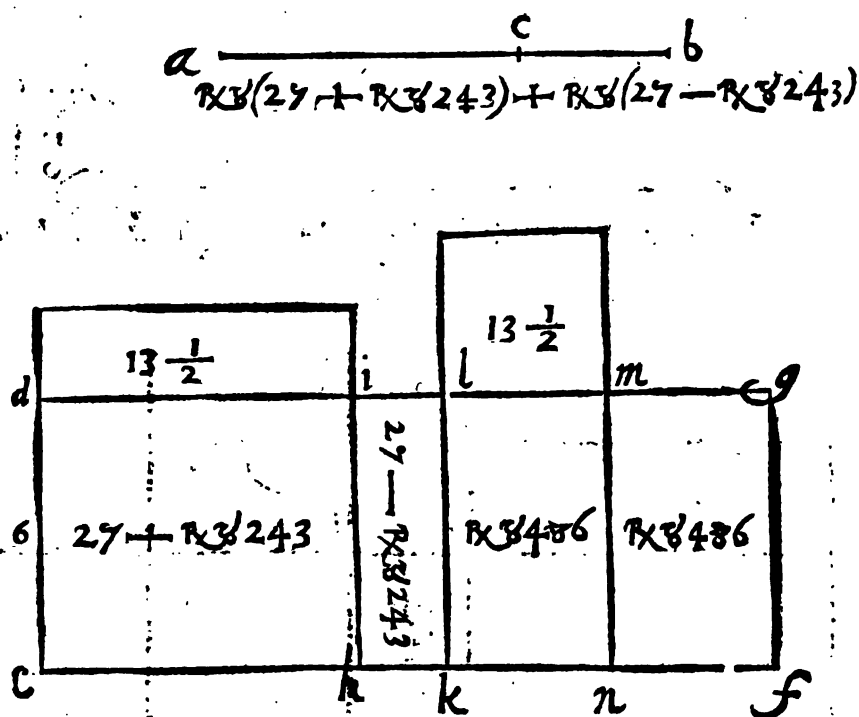
Theor. 46. Propos. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem faciet ex binis nominibus quartam.

SIT recta $a b$, Maior, cuius minus nomen sit $a c$, & ad Rationalem $d e$, applicetur rectangulum $d f$, aequale quadrato ex $a c$, faciens latitudinem $d g$: Dico rectam $d g$, esse ex binis nominibus quartam, Constructis enim iisdem, quae supra in propositione 61. Cum $a c$, $c b$, rectae sint potentia inter se incommensurabiles, quae Maiorem $a b$, componunt, faciuntque compositum ex ipsarum quadratis Rationale, at rectangulum sub ipsis contentum Medium, ut vult 40. propos. lib. huius, erit quoque rectangulum $d k$, composito ex rectarum quadratis $a c$, $c b$, aequale, Rationale, sed rectangulum $l f$, quod aequale est rectangulo bis sub $a c$, $c b$, Medium erit.

Rationale autem $d k$, ad Rationalem $d e$, applicatum latitudinem facit $d l$, Rationalem, & Rationali $d e$, expositae longitudine commensurabilem, ut vult 20. propos. lib. huius.

Cum autem rectangulum $l f$, quod est Medium ad Rationalem $l k$, sit applicatum, faciet $l g$, Rationalem & ei $l k$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.



Recta $d g$, $9 + \sqrt{3} 54$.

Tota superficies quadrati ex $a b$, erit $54 + \sqrt{3} 1944$.

Lineae $e h$, $h k$, sunt notatae propos. 58.

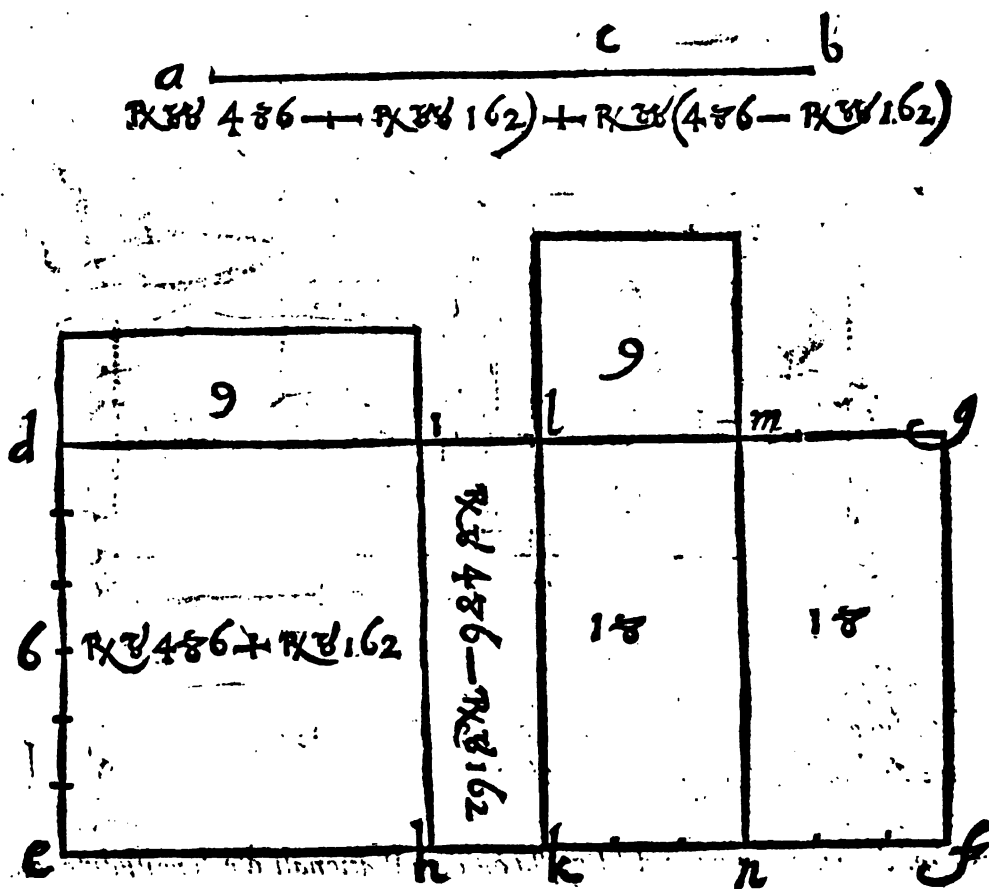
Quare cum duarum rectarum $d l$, $l g$, illa quidem Rationali $d e$, longitudine commensurabilis existat, hac vero minime sit eidem commensurabilis longitudine, erunt $d l$, $l g$, longitudine incommensurabiles, ut vult 13. propositio lib. huius. Rationales tamen ostensa sunt $d l$, $l g$, Rationales sunt igitur rectae $d l$, $l g$, & tantum potentia commensurabiles, ac propterea tota $d g$, ex illis duabus composita, irrationalis, quae ex binis nominibus dicitur, ut constat ex 37. propos. huius lib.

Iam verò demonstrabitur ut in propof. 61. lib. huius rectangulum sub d i , & i l , aequale esse quartæ parti quadrati ex minori l g , descripti, & quia quadrata ex a c , c b , sunt incommensurabilia, cum rectæ a c , c b , sint ex hypothesi potentia incommensurabiles, erunt & rectangula d b , i k , illis æqualia, incommensurabilia, Atque adeo & rectæ d i , i l , eandem rationem habentes cum illis longitudine erunt incommensurabiles. Quoniam verò ut in propof. 61. lib. huius ostensum est rectam d l , maiorem esse, quàm l g . Et ad maiorem d l , applicatum est rectangulum sub d i , i l , contentum, æquale quartæ parti quadrati ex minore l g , descripti deficiens figura quadrata, sitque recta d l , divisa in puncto i , in partes longitudine incommensurabiles, poterit maior d l , plus, quàm minor l g , quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex 19. propof. lib. huius. Quocirca cum d l , (nimirum maius nomen ex binis nominibus) ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali d e , expofita, erit d g , ex binis nominibus quarta, ut colligitur ex quarta definitione secundarum definitionum lib. huius. Quadratum igitur ad Rationalem, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 47. Propof. 65.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta a b , potens Rationale, ac Medium, cuius maius nomen sit a c , & ad Rationalem



Recta d g , $R. 54 + 6$. Tota superficies quadrati ex a b , erit $R. 1944 + 96$.

Lineæ e h , h k , notatæ sunt propof. 59. lib. huius.

d e , applicetur rectangulum d f , æquale quadrato ex a b , faciens latitudinem d g . Dico d g esse
ex

ex binis nominibus quintam. Construantur reliqua ut in propof. 61. Igitur cum recta a, c, b , quæ totam a, b , componunt, sint recta potentia incommensurabiles inter se facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale, ut vult 41. propof. lib. huius, erit & rectangulum d, k , huic composito æquale, Medium, & l, f , æquale quod bis sub a, c, b , continetur, Rationale.

Medium autem d, k , ad Rationalem d, e , applicatum latitudinem facit d, l , Rationalem, & ei longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propof. lib. huius. Igitur recta d, l , Rationalis erit, & Rationali d, e , incommensurabilis longitudine.

Cum autem rectangulum l, f , quod Rationale est ad eandem Rationalem d, e , vel l, k , quæ illi est æqualis, sit applicatum, faciet latitudinem l, g , Rationalem, & ipsi l, k , longitudine commensurabilem, ut constat ex 20. propof. lib. huius.

Quoniam verò duarum rectarum d, l, g , illa quidem Rationali d, e , exposita longitudine est incommensurabilis, hæc verò eidem sit commensurabilis longitudine, erunt ex 13. propof. lib. huius rectæ d, l, g , longitudine incommensurabiles: Rationales tamen ostensæ sunt d, l, g , Igitur Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles, ac propterea tota d, g , ex illis duabus composita Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propof. lib. huius. Iam verò ut in propof. 61. ostendemus rectangulum sub d, i, l æquale esse quarta parti quadrati ex minore l, g , descripti nimirum quadrato ex l, m , Rectam quoque d, l , maiorem esse recta l, g , & plus posse quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Igitur cum minus nomen l, g , Rationali d, e , exposita sit ostensum commensurabile longitudine, erit ex quinta definitione definitionum secundarum lib. huius, recta d, g , ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius quæ Rationale, & Medium potest, & c. Quod erat ostendendum.

Theor. 48. Propof. 66.

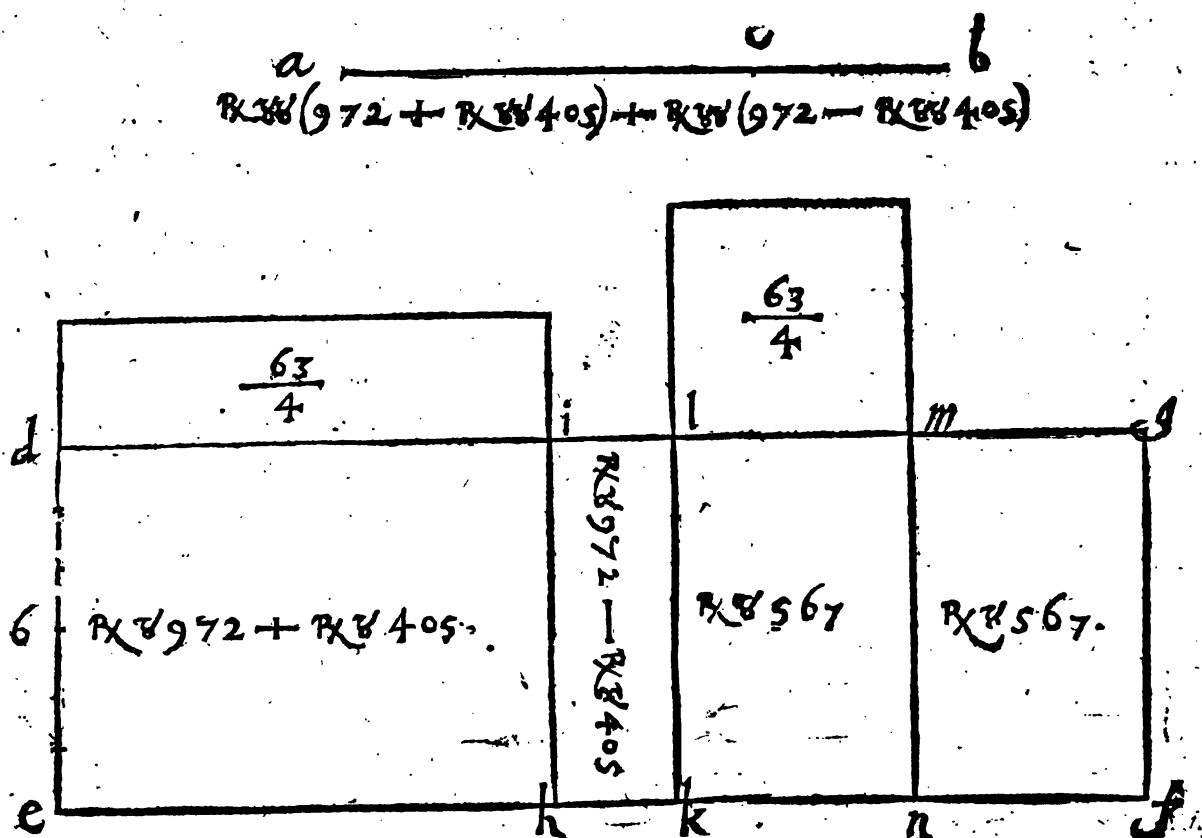
QVADRATVM eius, quæ bina media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT recta a, b , bina Media potens, cuius maius nomen sit a, c , & ad Rationalem d, e , applicetur rectangulum d, f , æquale quadrato ex a, b , descripto faciens latitudinem d, g , Dico rectam d, g , esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus sexta dicitur. Construantur reliqua omnia, ut in propof. 61. Igitur cum recta a, c, b , quæ binam Mediam potentem componunt, nimirum a, b , sint rectæ potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis, ut vult 42. propof. lib. huius, erunt rectangula d, k , & l, f , Media (est enim d, k , composito ex rectarum quadratis a, c, b , æquale, & l, f , rectangulo bis sub a, c, b , contento æquale).

Media autem illa ad Rationales d, e , & l, k , applicata latitudines faciunt d, l, g , Rationales, sed Rationalibus d, e , & l, k , longitudine incommensurabiles, ut vult 23. propof. lib. huius.

Quoniam verò rectangulum sub a, c, b , contentum incommensurabile est composito ex rectarum quadratis a, c, b , eidem verò rectangulo commensurabile est, quod bis sub a, c, b , continetur, erunt rectangula d, k , & l, f , inter se incommensurabilia, ut colligitur ex 13. propof. lib. huius, Ac propterea & rectæ d, l, g , eandem cum illis proportionem habentes incommensurabiles erunt longitudine, ut vult 10. propof. libri huius, Rationales tamen ostensæ sunt d, l, g , Ratio-

nales igitur, & tantum potentia inter se commensurabiles, Ac propterea recta d' g. ex illis duabus composita Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut constat ex 37. propos. libri huius.



Recta d g, R₂ z 108 + R₂ z 63.

Tota superficies quadrati ex a b, erit $\Re \times 3888 + \Re \times 2268$.

Lineas $e b, h k$, reperies propof. 60. lib. huius.

Tam verò ut in antecedenti propositione demonstrabitur d l, esse maius nomen, & plus posse, quam minus quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine; Cum autem neutrum ipsorum, neminum d l, l g, Rationali d e, exposita longitudine sit commensurabile, erit d g, ex binis nominibus sexta, ut vult sexta definitio secundarum definitionum lib. huius. Quadratum igitur eius, quæ hinc Media potest, &c. Quod erat ostendendum.

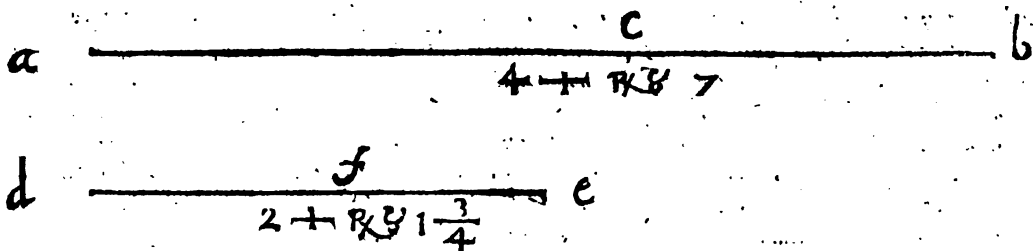
Theor. 49. Propos. 67.

E I, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus a b, vel prima, vel secunda, vel tertia, &c. qua divisa sit in sua nomina in c, quorum maior sit a c, & c b, minus sitque recta d e, ipsi a b, commensurabiles longitudine. Dico rectam d e, esse quoque ex binis nominibus & ordine eandem ipsi a b.

8. *Fiat deinde, ut tota a b, ad totam d e, ita ablata a c, ad ablatam d f, id est quarta propor-*
tionalis inveniatur, ut vult 12. propos. lib. 6. erit igitur reliqua c b, ad reliquam f e, ut tota a b,
ad totam d e, ut constat ex 19. propos. lib. 5.

Quoniam verò a, b, d, e , longitudine sunt commensurabiles erunt d, f , & a, c , & f, e, c, b , commensurabiles longitudine, ut vult 10. propos. lib. 5.



Sunt autem a, c, c, b , (duo nomina scilicet lineæ ex binis nominibus) Rationales, Igitur & d, f, f, e , Rationales erunt.

Rursus quia est, ut a, c , ad d, f , ita c, b , ad f, e , & permutando, ut a, c , ad c, b , ita d, f , ad f, e , sunt autem a, c, c, b , potentia tantum commensurabiles, erunt & d, f, f, e , potentia etiam solum commensurabiles, ut constat ex 10. propos. lib. 5. Quare d, f, f, e , Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles, ac proinde tota d, e , composita ex illis duabus, Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propos. lib. huius. Dico ordine eandem esse ipsi a, b , id est, si a, b , sit ex binis nominibus prima, erit & d, e , ex binis nominibus prima, si sit ex binis nominibus secunda, erit & d, e , ex binis nominibus secunda, &c. Iam verò aut a, c , plus potest, quam c, b , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si autem a, c , plus potest, quam c, b , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, poterit & d, f , plus, quam f, e , quadrato rectæ etiam sibi commensurabilis longitudine. Si verò a, c , plus potest, quam c, b , quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, poterit d, f , plus, quam f, e , quadrato rectæ etiam sibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex 15. propos. lib. huius.

Et si a, c , Rationali exposta sit longitudine commensurabilis, ita ut a, b , sit ex binis nominibus prima, erit & d, f , eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque & Rationalis, & d, f , eidem a, c , sit longitudine commensurabilis; Quare ex definitione prima secundarum definitionum lib. huius erit d, e , ex binis nominibus prima.

Si verò minus nomen c, b , Rationali exposta longitudine sit commensurabile, erit & f, e , eidem Rationali commensurabilis. Igitur cum a, b , ex binis nominibus sit secunda, erit & d, e , ex binis nominibus secunda.

Si denique neutrum ipsorum nominum Rationali exposta longitudine sit commensurabile, ita ut a, b , sit ex binis nominibus tertia, erunt & rectæ d, f, f, e , eidem Rationali longitudine incommensurabiles. Quare & d, e , erit ex binis nominibus tertia, ut vult tertia definitio secundarum definitionum lib. huius.

Quod si a, c plus possit, quam c, b , quadrato sibi longitudine incommensurabilis, poterit & d, f , plus, quam f, e , quadrato rectæ etiam sibi incommensurabilis longitudine, ut vult 15. propos. lib. huius. Quare ut prius concludamus & d, e , esse ex binis nominibus quartam, quintam, vel sextam, prius rectæ a, b , fuerit ex binis nominibus vel quarta, vel quinta, vel sexta.

Et igitur quæ de huius nominibus, &c. Quod nunc ostendendum.

SCHOLIUM CLXVII.

QVOD si recta d, e , potentia tantum commensurabilis sit ipsi a, b , quæ est ex binis nominibus, ostendimus quidem eodem modo, (si loco commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum;) & d, e , esse ex binis nominibus, ut ostendimus etiam antea, quod si a, b , sit commensurabilis, nulla modo concludimus Romanum sequitur, si a, c , maius nomen longitudine sit commensurabile exposta Rationali; & d, f , maius nomen eidem esse commensurabile longi-

iudine; propterea quod non utraque, nempe, exposita Rationalis, & d f, eadem a c, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At verò d f, potentia tantum, ex hypothesis. Immo verò si a b, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, ut d e, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

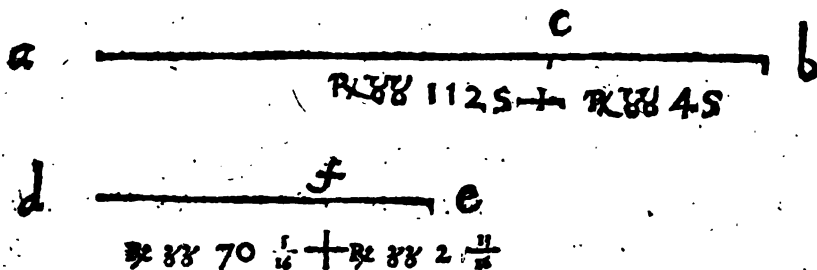
Sit enim a b, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad c, itaque ei commensurabilis potentia tantum d e, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad f, & partes a c, c b, partibus d f, f e, proportionales esse, nimirum illas, ad has eandem habere rationem, quam tota a b, ad totam d e, Dico nullo modo fieri posse, ut d e, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi a b, Nam si potest fieri, sit utraque ex binis nominibus prima. Erat ergo utrumque maius nomen a c, d f, ex defm. Rationali exposita commensurabile longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut a c, ad d f, ita a b, ad d e, erunt propterea & a b, d e, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim d e, ipsi a b, potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque a b, d e, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque utraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utrumque minus nomen c b, f e, ex definitione longitudine commensurabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur & tota a b, d e, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur. Semper tamen verum est, si a b, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam d e, ipsi a b, potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit a c, plus, quam c b, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, poterit quoque d f, plus, quam f e, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defm. erit d e, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si a b, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut a c, plus possit, quam c b, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque d f, plus, quam f e, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, Igitur ex defm. erit d e, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi a b.

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessarium erit d e, eadem ordine ipsi a b, esse quamquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

Theor. 50. Propos. 68.

Ei, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT recta a b, ex binis Mediis prima diuisa in sua nomina, sitque maius nomen a c, minus verò c b, sit recta d e, ei longitudine commensurabilis. Dico d e, esse quoque ex binis Mediis primam. Deinde fiat, ut tota a b, ad totam d e, sic ablata a c, ad ablatam d f, ut vult 12. propos. lib. 6. erunt igitur reliquæ c b, f e, inter se ut tota a b, d e, ex 19. propos. lib. 5.



Quoniam verò a b, d e, ponuntur longitudine inter se commensurabiles, erunt a c, d f, & c b, f e, etiam commensurabiles longitudine, ut vult 10. propos. lib. 5. Sunt autem a c, c b, Media. Igitur & d f, f e, quæ illis commensurantur, Media sunt, ut vult 24. propos. lib. huius.

Rursum cum sit ut a c, ad d f, ita c b, ad f e, & permutando, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, sunt autem a c, c b, potentia solum commensurabiles, erunt & d f, f e, tantum commensurabiles potentia, ut vult 10. propos. lib. huius. Cum igitur Media sint demonstrata a c, c b, erunt d f, f e, Media, & tantum potentia commensurabiles, Ac proinde recta d e, erit ex binis Mediis, ut vult 39. propos. lib. huius. Dico ordine eandem esse ipsi a b.

Quoniam enim est, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, Est autem ut a c, ad c b, ita quadratum ex a c,

a, c , ad rectangulum sub a, c, c, b , & c, b , ut d, f ad f, e , ita quadratum ex d, f , ad rectangulum sub d, f, f, e , contentum, ut demonstrauit Clavius lemmate 3. propos. 19. lib. huius. Erit quoque, ut quadratum ex a, c , ad rectangulum sub a, c, c, b , ita quadratum ex d, f , ad rectangulum sub d, f, f, e , contentum, & permutando, ut quadratum ex a, c , ad quadratum ex d, f , ita rectangulum sub a, c, c, b , contentum ad rectangulum sub d, f, f, e , comprehensum. Sunt autem quadrata ex a, c , & d, f , inter se commensurabilia, & igitur rectangula sub a, c, c, b , & sub d, f, f, e , contenta, commensurabilia erunt, ut uult 10. propos. lib. huius.

Si uero rectangulum sub a, c, c, b , Rationale est, Ita ut recta a, b , ex binis Mediis prima sit, erit & rectangulum sub d, f, f, e , Rationale, cum illi commensurabile sit ostensum, ac propterea & recta d, e , erit ex binis Mediis prima. Sed si rectangulum sub a, c, c, b , comprehensum fuerit Medium, ita ut a, b , sit ex binis Mediis secunda, erit & rectangulum sub d, f, f, e , illi commensurabile ostensum, Medium, ac proinde & recta d, e , ex binis Mediis secunda.

Et, igitur, quæ ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

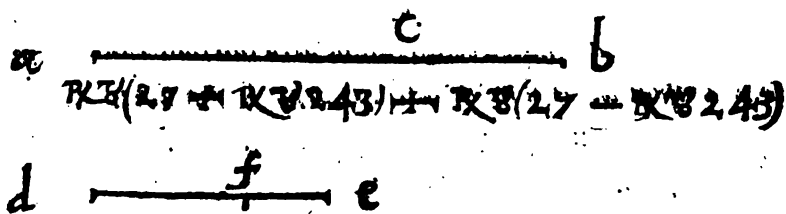
SCHOLIUM CLAVII.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam d, e , si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi a, c , quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi a, b , cui commensurabilis est, si modo loco commensurabilis longitudine in demonstratione dicamus ubique: commensurabilis potentia tantum, &c. Ut manifestum est.

Theor. 51. Propos. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT recta a, b , Maior diuisa in sua nomina, cuius maius nomen sit a, c , minus uero c, b , siue ei commensurabilis d, e , siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & d, e , Maiorem esse.



$$\begin{aligned} a, c, & R(27 + R(243)) \\ c, b, & R(27 - R(243)) \\ a, b, & R(27 + R(243)) + R(27 - R(243)) \\ d, f, & R\left(\frac{27}{4} + R\left(\frac{243}{16}\right)\right) \\ f, e, & R\left(\frac{27}{4} - R\left(\frac{243}{16}\right)\right) \\ d, e, & R\left(\frac{27}{4} + R\left(\frac{243}{16}\right)\right) + R\left(\frac{27}{4} - R\left(\frac{243}{16}\right)\right) \end{aligned}$$

FLUENT reliqua ut prima, ita ut a, c , & b , eandem habeant rationem ad d, f , f, e , ut tota a, b , ad totam d, e , Quoniam igitur a, b , & d, e , commensurabiles sunt vel longitudine, & potentia, vel potentia tantum, erunt quoque rectæ a, c , & d, f , & c, b , & f, e , eodem modo inter se commensura-

Dd

biles, ut constat ex 10. propos. lib. huius. Rursus quia est ut a c , ad d f , ita c b , ad f e , & permutando, ut a c , ad c b , ita d f , ad f e , erit ut quadratum ex a c , ad quadratum ex c b , ita quadratum ex d f , ad quadratum ex f e , & componendo, ut compositum ex rectorum quadratis a c , c b , ad quadratum ex c b , ita compositum ex rectorum quadratis ex d f , f e , ad quadratum ex f e , & conuertendo, ut quadratum ex c b , ad compositum ex rectorum quadratis a c , c b , ita quadratum ex f e , ad compositum ex rectorum quadratis d f , f e , & permutando, ut quadratum ex c b , ad quadratum ex f e , ita compositum ex rectorum quadratis a c , c b , ad compositum ex rectorum quadratis d f , f e . Sed quadratum ex c b , quadrato ex f e , est commensurabile, quod recte c b , f e , ostensa sint commensurabiles, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum.

Quare compositum ex rectorum quadratis a c , c b , composito ex rectorum quadratis d f , f e , commensurabile erit.

Est autem compositum ex rectorum quadratis a c , c b , Rationale, cum recte a c , c b , Maiorem a b , componant. Igitur & compositum ex rectorum quadratis d f , f e , Rationale erit, ut vult 9. def. lib. huius. Rursus quia est ut a c , ad c b , ita d f , ad f e , ut autem a c , ad c b , ita quadratum ex a c , ad rectangulum sub a c , c b , contentum, & ut d f , ad f e , ita quadratum ex d f , ad rectangulum sub d f , f e , comprehensum, ex lemmate 3. Clauij propos. 19. lib. huius, erit quoque ut quadratum ex a c , ad rectangulum sub a c , c b , ita quadratum ex d f , ad rectangulum sub d f , f e , contentum, & permutando, ut quadratum ex a c , ad quadratum ex d f , ita rectangulum sub a c , c b , ad rectangulum sub d f , f e .

Sunt autem quadrata ex a c , & d f , inter se commensurabilia, cum recte a c , d f , sint ostensa commensurabiles, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum. Quare rectangula sub a c , c b , & d f , f e , contenta, sunt inter se commensurabilia, ut colligitur ex 10. propos. lib. huius.

Sed rectangulum sub a c , c b , contentum, Medium est, igitur & rectangulum sub d f , f e , illi commensurabile, Medium erit, ut constat ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius. Cum autem sit ut a c , ad c b , sic d f , ad f e , sunt autem d f , f e , incommensurabiles potentia, quae faciunt compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium: erit tota d e , ex illis duabus composita, Maior, ut vult 40. propos. lib. huius.

Maiori igitur commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 52. Propos. 70.

RATIONALIS ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale, ac Medium potens est.

SIT recta a b , Rationale, ac Medium potens diuisa in sua nomina, cuius maius nomen sit a c , minus verò c b , sitque d e , ei commensurabilis, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum: Dico & d e , posse Rationale, & Medium, Iisdem enim constructis ut in antecedenti propos. demonstrabimus compositum ex rectorum quadratis a c , c b , commensurabile esse composito ex rectorum quadratis d f , f e . Sed compositum ex rectorum quadratis a c , c b , Medium est, ut docet 41. propos. lib. huius. Igitur compositum ex rectorum quadratis d f , f e , Medium erit cum illi sit commensurabile, ut colligitur ex corollario Clauij 24. propos. lib. huius. Eodem modo ut in antecedenti propositione erunt rectangula sub a c , c b , & d f , f e , commensurabilia, sed rectangulum sub a c , c b est Rationale, Igitur rectangulum sub d f , f e , Rationale erit:

Postremo recta d f, f e, ut in antecedenti proposuerunt potentia incommensurabiles, quæ cum faciant compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis, Rationale, ut

$$a \quad \overline{c} \quad b \\ \text{RV}(\text{RV } 486 + \text{RV } 162) + \text{RV}(\text{RV } 486 - \text{RV } 162)$$

$$d \quad \overline{f} \quad e \\ \text{RV}(\text{RV } 30 \frac{3}{8} + \text{RV } 10 \frac{1}{8}) + \text{RV}(\text{RV } 30 \frac{3}{8} - \text{RV } 10 \frac{1}{8})$$

$$a, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 486 + \text{RV } 8 \cdot 162)$$

$$c, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 486 - \text{RV } 8 \cdot 162)$$

$$d, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 30 \frac{3}{8} + \text{RV } 8 \cdot 10 \frac{1}{8})$$

$$f, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 30 \frac{3}{8} - \text{RV } 8 \cdot 10 \frac{1}{8})$$

ostensum est, erit tota d e, ex illis duabus composita, Rationale, ac Medium potens, ut vult AL. propos. lib. huius. Quare Rationali, ac Medium potenti, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 53. Propos. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT recta a b, bina Media potens diuisa in sua nomina, sitque illius maius nomen a c, minus verò c b, Sit autem recta d e, commensurabilis ipsi a b, siue longitudine, & potentia simul, siue potentia tantum. Dico rectam d e, esse bina Media potentem. Iisdem enim constructis ut supra demonstrabimus, ut in 69. propositione compositum ex rectarum quadratis a c, c b, & compositum ex rectarum quadratis d f, f e, inter se esse commensurabilia, similiter rectangulum sub a c, c b, commensurabile esse rectangulo sub d f, f e, contento.

$$a \quad \overline{c} \quad b \\ \text{RV}(\text{RV } 972 + \text{RV } 405) + \text{RV}(\text{RV } 972 - \text{RV } 405)$$

$$d \quad \overline{f} \quad e \\ \text{RV}(\text{RV } 60 \frac{3}{4} + \text{RV } 25 \frac{5}{16}) + \text{RV}(\text{RV } 60 \frac{3}{4} - \text{RV } 25 \frac{5}{16})$$

$$a, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 972 + \text{RV } 8 \cdot 405)$$

$$c, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 972 - \text{RV } 8 \cdot 405)$$

$$d, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 60 \frac{3}{4} + \text{RV } 8 \cdot 25 \frac{5}{16})$$

$$f, \text{RV } 8 (\text{RV } 8 \cdot 60 \frac{3}{4} - \text{RV } 8 \cdot 25 \frac{5}{16})$$

Igitur cum tam compositum ex rectarum quadratis a c, c b, quàm rectangulum sub a c, c b, Medium sit, erit ex corollaria Clauy. propos. 24. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis

a, c, b , & rectangulum sub ipsis contentum, Medium. Sed recta d, f, f, e , ut prius sunt potentia incommensurabiles. Postremo quoniam compositum ex rectarum quadratis a, c, b , & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia sunt ut vult 42. propof. lib. huius. Sit autem compositum ex rectarum quadratis d, f, f, e , ostensum commensurabile composito ex rectarum quadratis a, c, b , & rectangulum sub d, f, f, e , & rectangula sub a, c, b , sit etiam commensurabile demonstratum, & sunt ex scholio Clauij propof. 14. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis d, f, f, e , & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia. Igitur cum d, f, f, e , sint recta potentia incommensurabiles, quae faciunt compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, erit tota d, e , bina Media potens ut vult propof. 42. lib. huius. Quare bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

Theor. 54. Propof. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, vel ea quae ex binis nominibus, vel quae ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens.

SIT Rationale spatium a, b , cum quo componatur spatium Medium c, d . Dico rectam quae totum spatium a, d , potest, esse vnā ex illis quatuor, quae sunt nominata in hac propositione. Erit enim rectangulum a, b , vel Maius, vel minus, quam c, d , aequale enim esse non potest, Alias cum a, b , Rationale ponatur, essent ambo Rationalia, quod est contra hypothesin: Sit igitur rectangulum a, b , Rectangulo c, d , maius, & Rationali e, f , exposita applicetur ad eam rectangulum e, g , rectangulo a, b , aequale & ad h, g , quae Rationali e, f , exposita est aequalis, applicetur aliud rectangulum b, i , rectangulo c, d , aequale.

Quoniam a, b , est Rationale, & c, d , Medium, erit quoque rectangulum e, g , Rationale, & rectangulum b, i , Medium.

Rationale autem applicatum ad Rationalem longitudinem facit Rationalem eique Rationali longitudine commensurabilem, ut vult 20. propof. lib. huius, quare latitudo e, h , Rationalis erit & ipsi e, f , commensurabilis longitudine.

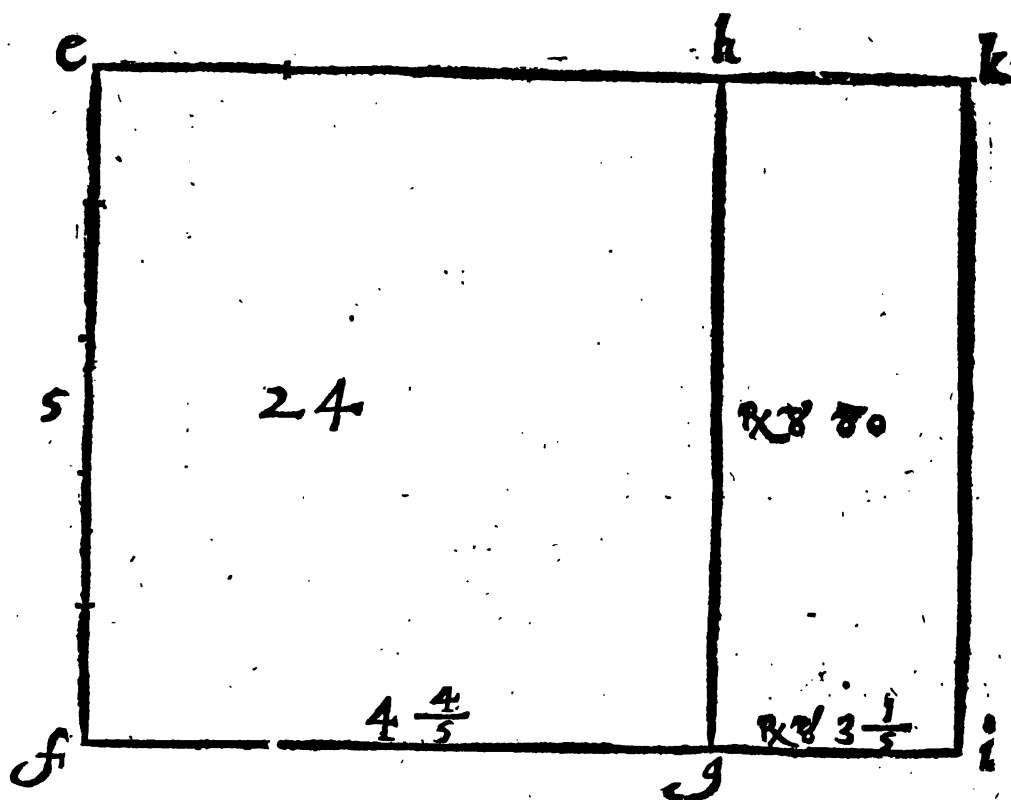
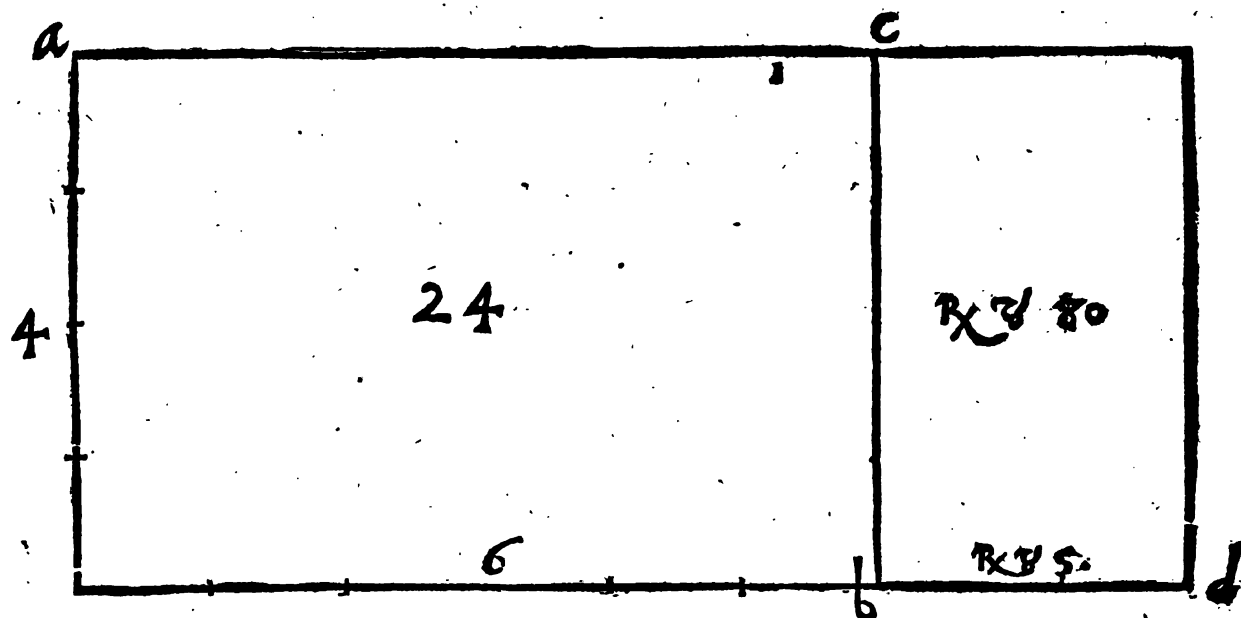
Medium verò ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed ei incommensurabilem longitudine, ut constat ex 23. propof. lib. huius: Quare latitudo h, k , Rationalis erit, & ipsi h, g , longitudine incommensurabilis.

Rursus cum rectangula e, g , & h, i , inter se sint incommensurabilia, Cum e, g , Rationale sit, h, i , vero Irrationale, erunt rectae e, h, h, k , eandem cum illis habentes Rationem incommensurabiles longitudine, ut vult 10. propof. lib. huius. Rationales tamen iam sunt ostense rectae e, h, h, k , Rationales igitur & tantum potentia commensurabiles sunt, Ac propterea tota e, k , ex illis duabus composita Irrationalis, quae ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propof. lib. huius.

Quoniam verò rectangulum a, b , maius ponitur, quam c, d , hoc est, rectangulum e, g , maius quam h, i , erit quoque recta e, h , maior, quam h, k , cum e, h, h, k , eandem habeant rationem inter se, quam rectangula e, g, h, i , ut constat ex 1. propof. lib. 6.

Iam verò recta e, h , plus poterit, quam minor h, k , quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Si plus possit e, h , quam h, k , quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine, erit e, k , ex binis nominibus prima, cum maius nomen ipsius e, h , commensu-

rabile sit ostensum Rationali e f exposita: Quare recta, qua spatium e i, poterit, contentum sub Rationali e f, & ex binis nominibus prima e k, atque adeo & spatium a d, compositum ex Rq-



Recta potens Rectangul. e i. $Rq \ 8 \left(\frac{40}{1} Rq \ 8 \frac{11000}{115} \right) Rq \ 8 \left(\frac{40}{1} - Rq \ 8 \frac{11000}{115} \right)$ qua Maior dicitur.
 vel $Rq \ 8 \left(12 \frac{1}{2} Rq \ 8 \ 12 \ 4 \right) Rq \ 8 \left(12 - Rq \ 8 \ 12 \ 4 \right)$
 f i, $Rq \ 8 \ \frac{24}{1} + Rq \ 8 \ \frac{16}{1}$ Ex binis nominibus quarta.

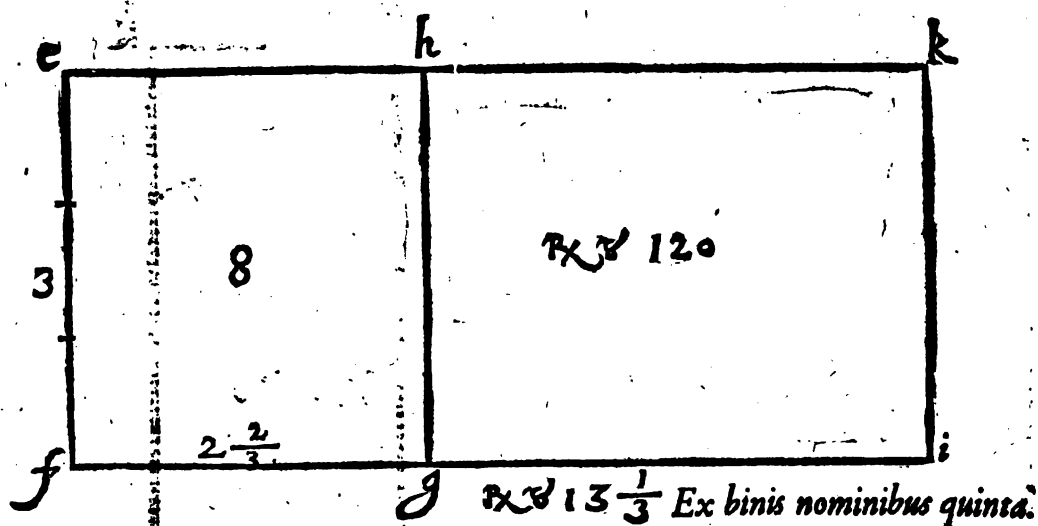
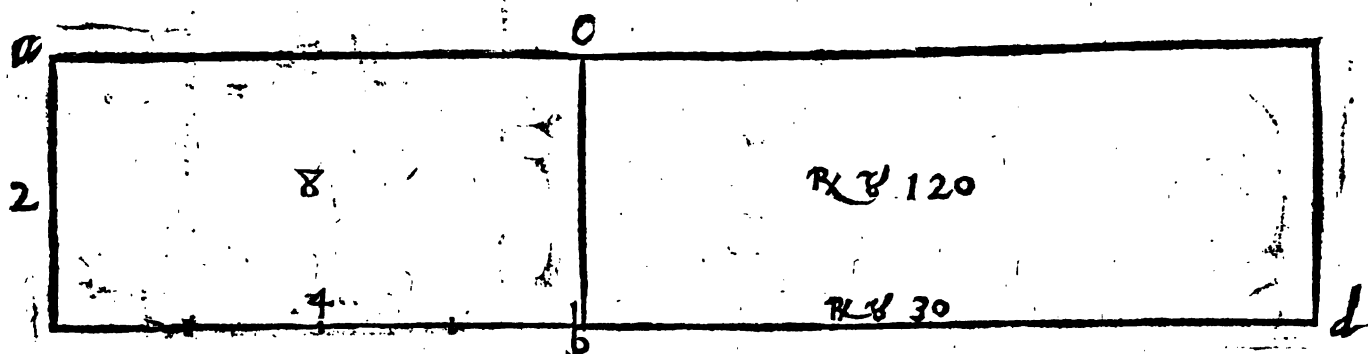
rationali a b, & Medio c d, Irrationalis est, qua ex binis nominibus dicitur ut constat ex 55. prop. lib. huius.

Sed si recta e h, plus possit, quàm h k, quadrata recta sibi longitudine incommensurabilis erit ex e k, ex binis nominibus quarta ex definitione quarta secundarum definitionum lib. huius.

E c

cum maius nomen e h , commensurabile sit ostensum Rationali exposita e f . Igitur recta, quae poterit spatium e i , contentum sub Rationali & ex binis nominibus quarta e k , Atque adeo & spatium a d , Irrationalis erit, quae vocatur Maior, ut constat ex 58. propos. lib. huius.

SIT deinde rectangulum a b , minus, quàm rectangulum c d , & reliqua construantur ut prius. Erit igitur ut prius e k , ex binis nominibus & e h , ipsi e f , longitudine commensurabilis.



Linea potens rectang. e i , $R\sqrt{8(R\sqrt{8\frac{20}{3}} + R\sqrt{8\frac{27}{27}})} + R\sqrt{8(R\sqrt{8\frac{20}{3}} - R\sqrt{8\frac{178}{17}})}$
 quae Rationale, ac Medium potens appellatur.

vel $R\sqrt{2(R\sqrt{8\frac{30}{3}} + R\sqrt{8\frac{14}{3}})} + R\sqrt{8(R\sqrt{8\frac{30}{3}} - R\sqrt{8\frac{14}{3}})}$

Quoniam verò a b , minus est, quàm c d , hoc est e g , quàm h i , erit quoque recta e h , minor, quàm h k , Poterit igitur rursus maius nomen h k , plus, quàm minus quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si verò maius nomen h k , plus possit, quàm minus quadrato recta sibi commensurabilis longitudine, erit e k , ex binis nominibus secunda, cum minus nomen e h , Rationali e f , exposita sit longitudine commensurabile. Quare recta potens spatium e i , contentum sub Rationali e f , & ex binis nominibus secunda e k , Atque adeo & spatium a d , ex Rationali a b , & Medio c d , compositum, Irrationalis est, quae ex binis Mediis prima vocatur, ut vult propos. 56. lib. huius.

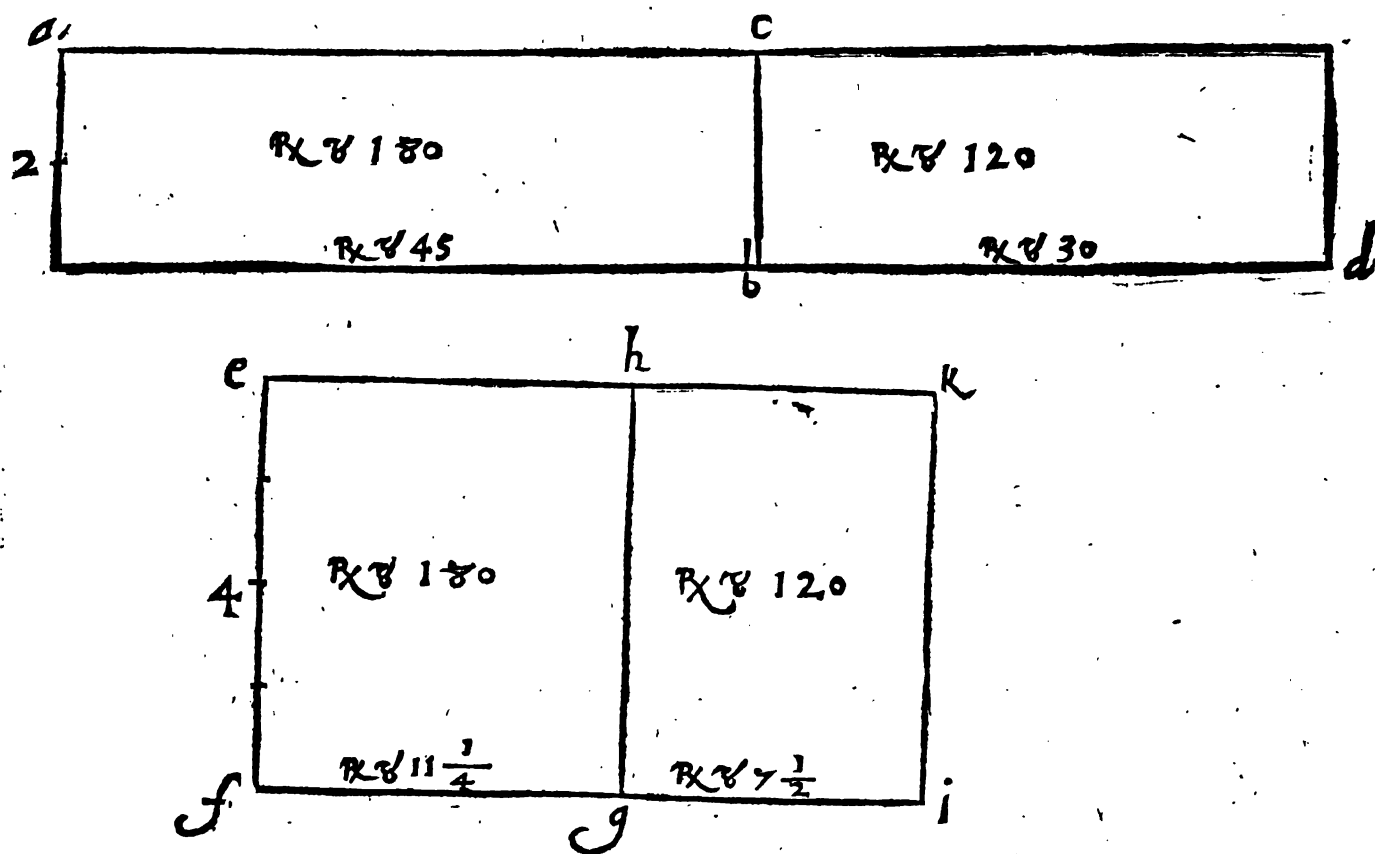
Si verò h k , plus possit, quàm e h , quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, erit

e & k , ex binis nominibus quinta, cum minus nomen e h , Rationali exposita longitudine commensurabile sit ostensum. Ac proinde recta potens spatium e i , contentum sub Rationali e f , & ex binis nominibus quinta e k , Atque adeo & spatium a d , Irrationalis est, quæ Rationalis, ac Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, ac Medium componentur, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 15. Propos. 73.

Si duo media inter se incommensurabilia componentur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

COMPONENTVR duo Media incommensurabilia a b , c d , Dico rectam, quæ spatium a d , potest, esse vnam ex illis duabus, quæ nominantur in propositione. Erit enim a b , vel maius, vel minus, quàm c d , æqualia enim non erunt, aliàs essent commensurabilia. Quod est contra hypothesin. Sit primò maius, & cetera fiant vt in antecedenti.



Linea potens rectang. e i . $R \ 2 (R \ 2 \frac{70}{16} + R \ 2 \frac{120}{16}) + R \ 2 (R \ 2 \frac{70}{16} - R \ 2 \frac{120}{16})$
 vel $R \ 2 (R \ 2 \ 45 + R \ 2 \ 15) + R \ 2 (R \ 2 \ 45 - R \ 2 \ 15)$ quæ bina Media potens appellatur.
 f i , $R \ 2 \ \frac{11}{4} + R \ 2 \ \frac{7}{2}$ ex binis nominibus sexta.

Igitur quia spatia a b , c d , Media & incommensurabilia ponuntur, erunt & rectangula e g , h i , Media, & incommensurabilia: Quare & recta e h , h k , eandem cum illis rationem habentes, longitudine erunt incommensurabiles, vt vult 10. propos. lib. huius. Media autem illa ad Ra-

tionales $e f, h g$, applicata latitudines faciunt $e h, h k$, Rationales, & Rationalibus $e f, h g$, longitudine incommensurabiles, ut vult 23. propof. lib. huius: Sed Rationales sunt $e h, h k$, Igitur Rationales, & tantum potentia commensurabiles inter se, Ac proinde recta $e k$, ex illis duabus composita, Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propof. lib. huius.

Quoniam igitur ut in antecedenti propositione $a b$, ponitur maius, quam $c d$, poterit recta $e h$, plus, quam $h k$, quadrato sibi commensurabilis longitudine vel incommensurabilis. Si plus possit quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, cum utrumque nomen Rationali $e f$, exposita longitudine incommensurabile sit ostensum, erit ex tertia definitione secundarum definitionum recta $e k$, ex binis nominibus tertia.

Quare recta potens spatium $e i$, contentum sub Rationali $e f$, & ex binis nominibus tertia $e k$, Atque adeo & spatium $a d$, irrationalis est quæ ex binis Mediis secunda dicitur, ut vult 37. propofitio libri huius.

Si verò recta $e h$, plus possit, quam $h k$, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, cum utrumque nomen Rationali exposita $e f$, sit longitudine incommensurabile, erit $e k$, ex definitione sexta secundarum definitionum ex binis nominibus sexta. Igitur linea potens spatium $e i$, contentum sub Rationali $e f$, & ex binis nominibus sexta $e k$, Atque adeo & spatium $a d$, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur, ut constat ex 60. propof. lib. huius.

Sed si rectangulum $a b$, minus sit, quam $c d$, non aliter propositum demonstrabimus, ut constat ex figura. Quare si duo Media, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM EX CLAVIO.

Ex his omnibus facile colligitur, eam quæ ex binis nominibus & reliquis ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Media, neque inter se eandem esse.

^a, 23. decimi. Nam quadratum Media, ad Rationalem lineam applicatum, ^a latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

^b, 61. decimi. At quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, ^b latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

^c, 62. decimi. Et quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, ^c latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

^d, 63. decimi. Quadratum deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, ^d latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

^e, 64. decimi. At verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, ^e latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

^f, 65. decimi. Quadratum autem eius, quæ Rationale ac Medium potest ad Rationalem applicatum, ^f latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

^g, 66. decimi. Postremo quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, ^g latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Media, & inter se, à latitudine quidem Media, quod hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus, perspicuum est omnes Irrationales lineas, de quibus hætenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

HÆCTENUS egit Euclides de septem senariis.

In primo qui continetur propof. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus, & eius, quæ ex binis Mediis prima, & eius, quæ ex binis Mediis secunda; & Maioris, & eius, quæ Rationale, ac Medium potest, & denique eius, quæ potest bina Media.

In secundo, quem continent propof. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum divisionibus, docens singulas in singulis diutaxat punctus dividi posse in sua nomina.

In tertio deinde contento propof. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inventionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta & sexta.

In quarto quem absolunt propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit quomodo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens quænam lineæ Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

In

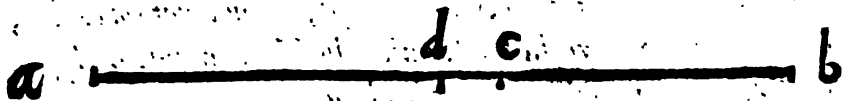
In quinto autem quem reperies in propof. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo fenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

In sexto vero, qui quinque propof. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abfoluitur, demonftrat lineam quamcumque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo fenario, effe Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis eft.

In feptimo denique contento duabus propofitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurfus differentiam aliam sex predictarum Irrationalium.

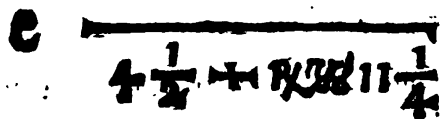
Reperitur autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo fenario, Analogia feu proportionalitas Arithmetica, quae quidem confiftit in exceffu eodem. Et recta Media proportionalis, fecundum Analogiam Arithmetican, inter duo nomina cuiusvis lineae Irrationalis, eft quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiftit.

Sit enim quacumque Irrationalis, nempe ex binis nominibus a , b , cuius maius nomen a , & diuidatur a , b , bifariam in d : &



$$ab, 9 + 8 \times 45.$$

$$ac, 9.$$



cuius dimidia a , d , vel d , b , equalis fumatur c . Dico c , mediam effe fecundum Analogiam Arithmetican, inter a , c , b , & effe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim a , c , superat dimidiam a , d , recta d , c , & dimidia d , b , superat ipsam c , b , eadem recta d , c , perfpicuum eft, dimidiam ipsius a , b , nempe c , effe mediam proportionalem inter a , c , b , in Analogia Arithmetica.


Rurfus quia c , commensurabilis eft longitudine toti a , b , cum hac illius fit dupla; erit & c , Irrationalis eadem ipsi a , b , vt in fepto fenario eft demonftratum.

Idem oftendemus non aliter in ceteris lineis Irrationalibus contingere.

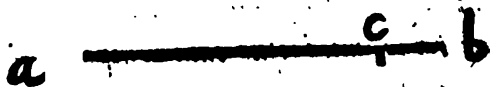
Sequuntur iam feptem alij fenarij, in quibus eadem Euclides demonftrat, de sex alijs lineis Irrationalibus, quae per detractionem generantur, quae in precedentibus feptem fenarijs de Irrationalibus, quae per compositionem funt, cum oftendiffe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM PER DETRACTIONEM.

Theor. 56. Propof. 74.

 Ià Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis exiftens toti: Reliqua Irrationalis eft. Vocetur autem Apotome.

EX Rationali a , b , detrahasur Rationalis a , c , illi tantum potentia commensurabilis. Dico reliquam b , c , effe Irrationalem. Nam cum ex lemmate 3. Clauij propof. 19. huius lib. fit vt



$$ab, 9$$

$$ac, 8 \times 45.$$

$$cb, 9 - 8 \times 45.$$

a , b , ad a , c , ita quadratum ex a , b , ad rectangulum sub a , b , a , c , funt autem a , b , & a , c , incommensurabiles longitudine, erunt quadratum ex a , b , & rectangulum sub a , b , a , c , contentum incommensurabilia. Sed quadrato ex a , b , commensurable eft compositum ex rectarum quadratis a , b , a , c . Cum enim a , b , a , c , commensurabiles funt potentia, erunt earum quadrata commensura-

Ff

bilis ac proinde compositum ex ipsarum quadratis, utriusque quadrato ex a, b, a, c , descripto, commensurabile, ut constat ex 16. propos. lib. huius. Rectangulo vero sub a, b, a, c , contento commensurabile est, quod bis sub ipsis continetur. Quare ex scholio Clavi propos. 14. lib. huius compositum ex rectarum quadratis a, b, a, c , & rectangulum sub ipsis contentum, incommensurabilia sunt. Est autem compositum ex rectarum quadratis a, b, a, c , æquale rectangulo bis sub a, b, a, c , una cum quadrato ex b, c , ut constat ex 7. propos. lib. 2. Quare compositum ex rectarum quadratis a, b, a, c , quadrato ex b, c , est incommensurabile ut vult coroll. Clavi propos. 17. lib. huius. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis a, b, a, c , Rationale sit, erit quadratum ex b, c , illi incommensurabile, Irrationale, Atque adeo & recta b, c , Irrationalis. Vocetur autem Apotome, siue Residuum. Si igitur à Rationali, & c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

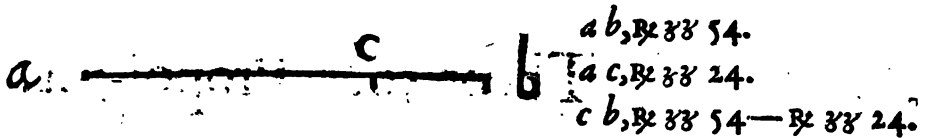
Si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

Nota. Cum a, b, a, c sint Rationales potentia tantum commensurabiles, erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus auferatur, cuius maius nomen a, b , & minus a, c , auferatur igitur a, c , minus nomen ex maiori nomine a, b , ut reliqua- tur Apotome b, c .

Theor. 57. Propos. 75.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.

DETRAHATUR ex Media a, b , Media a, c tantum commensurabilis potentia, sitque rectangulum sub Media a, b, a, c , Rationale. Dico reliquam b, c , esse Irrationalem.



Cum enim recta a, b, a, c , Mediae sint potentia tantum commensurabiles, erunt quadrata ex illis descripta, Mediae, & commensurabilia, & compositum ex ipsarum quadratis a, b, a, c , utriusque quadrato ex a, b, a, c , descripto, commensurabile erit, & Medium, ut vult 16. propos. lib. huius.

Quoniam vero rectangulum sub Media a, b, a, c , contentum, Rationale ponitur, erit & quod bis sub ipsis continetur, Rationale.

Quare rectangulum bis sub a, b, a, c , quod est Rationale, incommensurabile erit composito ex rectarum quadratis a, b, a, c , quod est Medium. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis a, b, a, c , æquale sit rectangulo bis sub a, b, a, c , contento una cum quadrato ex b, c , ut vult 7. propos. lib. 2. erit quoque rectangulum bis sub a, b, a, c , una cum quadrato ex b, c , rectangulo bis sub a, b, a, c , incommensurabile. Quare rectangulum bis sub a, b, a, c , & quadratum ex b, c , incommensurabilia sunt. Cum igitur rectangulum bis sub a, b, a, c , Rationale sit, erit quadratum ex b, c , ei incommensurabile, Irrationale, & proinde recta b, c , Irrationalis. Vocetur autem Media Apotome prima. Si igitur à Media, & c. Quod erat demonstrandum.

POTVISSET hac propositio proponi hoc modo.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.

Omnis enim a b, a c, sunt Mediae potentia solum commensurabiles, contineturque Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen a b, & minus a c, auferatur igitur a c, minus nomen ex maiori a b, ut relinquatur b c, Media Apotome prima.

Theor. 58. Propos. 76.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ eum tota Meditum contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.

DETRAHATUR à Media a b, Media a c, quæ sit tantum commensurabilis potentia Media a b, sitque rectangulum sub Mediis a b, a c, contentum, Medium. Dico reliquam b c, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex Mediis a b, a c, potentia inter se commensurabilibus, Media sunt, & inter se commensurabilia, erit compositum ex ipsarum quadratis utrique quadrato ex Mediis a b, a c, descripto, commensurabile, ut vult 16. propos. libri huius. Sane autem quadrata illa Media. Igitur & compositum illud, Medium erit, ex corollario Clavij propos. 24. libri huius.

Rursus quia rectangulum sub Mediis a b, a c, ex hypothese Medium est, erit & quod bis sub a b, a c, continetur, Medium ex eodem corollario Clavij.



a b, Bz 38 128.

a c, Bz 38 18.

c b, Bz 38 128 — Bz 38 18.

Cum autem compositum ex rectarum quadratis a b, a c, aequale sit rectangulo bis sub a b, a c, comprehenso una cum quadrato ex b c, per 7. propos. lib. 2. superabit compositum ex rectarum quadratis a b, a c, rectangulum bis sub ipsis contentum quadrato b c, Sunt autem ambo Media, nimirum compositum ex rectarum quadratis a b, a c, & rectangulum bis sub illis contentum.

Igitur cum à Meditum non superet Medium, Rationali, non erit quadratum ex b c, Rationale, sed Meditum, ut constat ex 27. propos. lib. huius recta quoque b c, Irrationalis, quæ Media Apotome secunda vocatur. Si igitur à Media, Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

HOC etiam Theorema ita potuisset proponi.

Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.

Quoniam enim a b, a c, Mediae sunt potentia tantum commensurabiles, contineturque Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen a b, & minus a c, auferatur igitur a c, minus nomen ex maiori a b, ut relinquatur b c, Media Apotome secunda.

Theor. 59. Propos. 77.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATUR ex recta $a b$, recta $a c$, potentia incommensurabilis ipsi $a b$, sitque compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Dico reliquam $b c$, esse Irrationalem.

$$\begin{array}{l} a \text{ --- } c \text{ --- } b \\ \begin{array}{l} a b, \text{R} \times (18 + \text{R} \times 108.) \\ a c, \text{R} \times (18 - \text{R} \times 108.) \\ c b, \text{R} \times (18 + \text{R} \times 108) - \text{R} \times (18 - \text{R} \times 108.) \end{array} \end{array}$$

Quoniam enim compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, est Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, Ac proinde & quod bis sub $a b$, $a c$, erunt compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia: Est autem compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, æquale rectangulo bis sub $a b$, $a c$, contento vna cum quadrato ex $b c$, ut constat ex 7. lib. 2. Quare ex corollario Clavi propof. 17. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, quadrato ex $b c$, est incommensurabile.

Est autem compositum illud Rationale. Quare quadratum ex $b c$, illi incommensurabile, Irrationale est, Ac proinde & recta $b c$, Irrationalis, quæ vocetur Minor. Si à recta igitur recta auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

SIC etiam Theorema hoc poterat proponi.

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est: Vocetur autem Minor.

Nam cum $a b$, $a c$, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Major, cuiusque maius nomen $a b$, minus autem $a c$, auferatur igitur $a c$, minus nomen ex maiori $a b$, ut relinquatur Minor $b c$.

Theor. 60. Propos. 78.

Si à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR ex recta $a b$, recta $a c$, ipsi $a b$, incommensurabilis, sitque compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, Medium, rectangulum verò sub ipsis comprehensum, Rationale. Dico reliquam $b c$, esse Irrationalem.


Nam cum compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, Medium sit, rectangulum verò sub illis contentum, Rationale, Ac proinde & quod bis sub $a b$, $a c$, continetur, erunt compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, & rectangulum bis sub ipsis contentum, incommensurabilia: Compositum autem ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, æquale est rectangulo bis sub $a b$, $a c$, vna cum qua-

$$\begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{---} \quad \text{c} \quad \text{---} \quad \text{b} \quad \text{a b, R\& 3 (R\& 3 216 + R\& 3 72)} \\
 \text{a c, R\& 3 (R\& 3 216 - R\& 3 72)} \\
 \text{c b, R\& 3 (R\& 3 216 + R\& 3 72) - R\& 3 (R\& 3 216 - R\& 3 72)}
 \end{array}$$

SCHOLIUM CLAVII.

Cum enim a, b, c , sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est a, b , minus autem c . Aufertur igitur minus nomen a, c , à maiori a, b , ut b, c , cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

*DETRAHATUR ex recta $a b$, recta $a c$, potentia incommensurabilis ipsi $a b$, sitque
tàm compositum ex ipsarum quadratis $a b$, $a c$, quàm rectangulum sub ipsis contentum, Medium,
Et rectangulum illud sit etiam incommensurabile composito ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, Dico
reliquam $b c$, esse Irrationalem.*

a  b

$a b, Bz (Bz 180 + Bz 60.)$
 $a c, Bz (Bz 180 - Bz 60.)$
 $c b, Bz (Bz 180 + Bz 60.) - Bz (Bz 180 - Bz 60.)$

Gg

In hunc modum proponi quoque potuisset hoc Theorema.

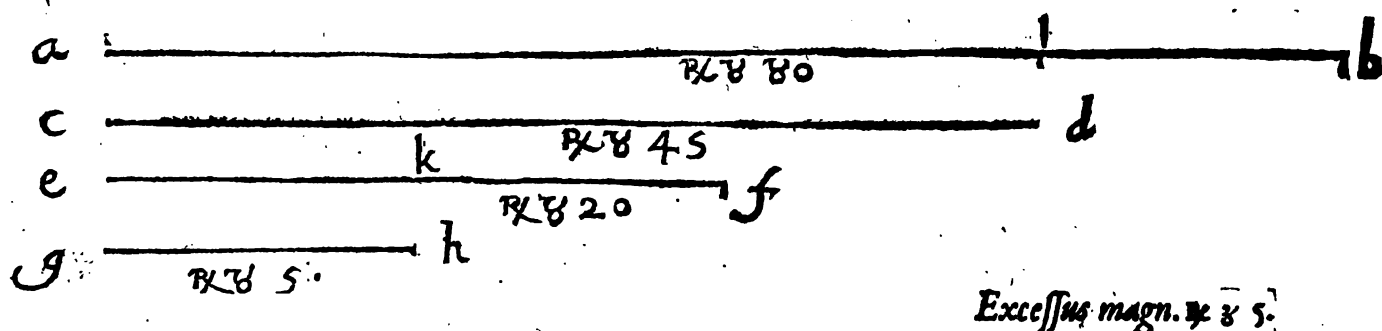
Si à maiori nomine eius, quæ bina Media potest minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum a, b, c , sint potentia incommensurabiles; faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabileque compositum ex quadratis ipsarum, erit compositum ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen a, b , & minus a, c . Aufertur igitur minus nomen a, c , ex maiori a, b , ut relinquatur b, c , cum Medio Medium totum efficiens.

L E M M A.

Si idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem, & quartam.

SINT quatuor magnitudines a, b, c, d, e, f, g, h , sitque i, b , excessus inter a, b, c, d , equalis excessui k, f , inter e, f, g, h . Dico eundem esse excessum inter a, b, e, f , qui inter c, d, g, h .



Quoniam enim i, b , excessus est inter a, b, c, d ; erit a, i , ipsi c, d , equalis. Eodem modo equalis erit e, k , ipsi g, h . Idem igitur excessus erit inter a, i, c, e, k , qui inter c, d, g, h , cum hæc magnitudines illis sint æquales, singula singulis. Est autem totorum a, b, e, f , ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter a, i, e, k ; quod i, b, k, f , æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter a, b, c, e, f , qui inter c, d, g, h , quod est propositum.

C O R O L L A R I U M E X C L A V I O.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmetica Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmetica Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem offendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmetica habeant.

Theor. 62. Propos. 80.

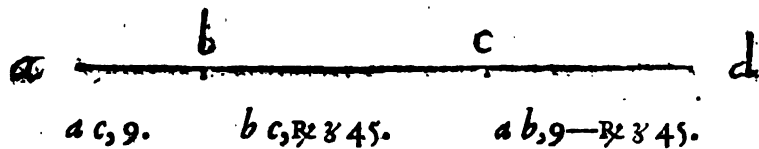
A P O T O M æ vnà tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome a, b , etque congruens b, c , potentia tantum toti a, c , commensurabilis. Dico ipsi a, b , nullam aliam Rationalem congruere posse, quæ sit etiam potentia tantum commensurabilis.

Si enim fieri potest, congruat ei alia Rationalis b, d , ita ut b, d , ipsi a, d , sit etiam tantum potentia commensurabilis.

Quoniam igitur recta b, c , Rationalis est, erit a, c , quæ ei potentia commensuratur, Rationalis,

Ac proinde Rationales erunt a, c, b, c , & tantum potentia commensurabiles: pari ratione erunt a, d, d, b , Rationales, & tantum commensurabiles potentia.



Quia verò idem est excessus inter compositum ex rectarum quadratis a, c, b, c , & rectangulum bis sub ipsis contentum, qui inter compositum ex rectarum quadratis a, d, d, b , & rectangulum bis sub a, d, d, b , comprehensum (superatur enim rectangulum bis sub a, c, b, c , à composito ex rectarum quadratis a, c, b, c , quadrato a, b , ut vult 7. propos. lib. 2. Eodémque modo & rectangulum bis sub a, d, d, b , superatur à composito ex rectarum quadratis a, d, d, b , quadrato etiam ex a, b , descripto). Quare permutando ex lemmate Claviij antecedentis propositionis, idem excessus erit inter compositum ex rectarum quadratis a, c, b, c , & inter compositum ex rectarum quadratis a, d, d, b , qui inter rectangulum bis sub a, c, b, c , & rectangulum bis sub a, d, d, b :

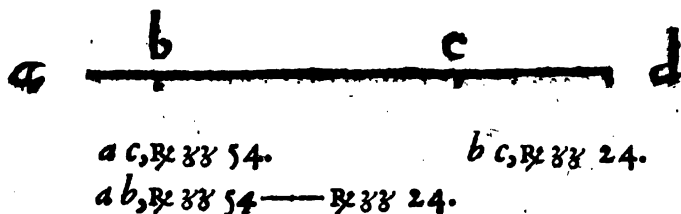
Est autem excessus inter illa composita spatium Rationale, cum tam compositum ex rectarum quadratis a, c, b, c , quam compositum ex rectarum quadratis a, d, d, b , Rationale ponatur, ut constat ex scholio Claviij propos. 27. lib. huius. Quare excessus inter rectangulum bis sub a, c, b, c , & rectangulum bis sub a, d, d, b , spatium est etiam Rationale: Quoniam verò rectangulum sub a, c, b, c , potentia solum commensurabilibus, Medium est, ut docet 22. propos. huius lib. erit & eius duplum, Medium, ex corollario Claviij propos. 24. lib. huius eadémque ratione, & quod bis sub a, d, d, b , Medium erit. Medium autem non superat Medium, Rationali. Quare excessus inter rectangulum bis sub a, c, b, c , & rectangulum bis sub a, d, d, b , spatium non est Rationale. Sed Rationale cum esse ostendimus. Quod absurdum. Quare Apotome a, b , una tantum Rationalis linea congruit nimirum b, c , quæ ei est potentia commensurabilis. Quod erat ostendendum.

Theor. 63. Propos. 81.

MEDIA Apotomæ primæ una tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Media Apotomæ prima a, b , & illi congruens b, c , Media, quæ toti a, c , sit solum potentia commensurabilis, sitque rectangulum bis sub a, c, b, c , Rationale. Dico ipsi a, b , nullam aliam Mediam congruere posse, quæ etiam sit toti a, c , potentia commensurabilis.

Si enim fieri potest congruat alia b, d , Media toti etiam a, d , potentia solum commensurabilis, sitque etiam rectangulum bis sub a, d, d, b , Rationale.



Quoniam b, c , Media est, & tantum potentia commensurabilis ipsi a, c , erit necessario recta a, c , Media, ut constat ex 24. propos. lib. huius. Quare recta a, c, b, c , Media sunt inter se tantum potentia commensurabiles:

Cum autem idem excessus sit inter compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, qui inter rectangulum bis sub $a c, b c$, & rectangulum bis sub $a d, d b$, ut in precedenti demonstrauius. Sit autem excessus inter illa rectangula spatium Rationale, cum tam rectangulum bis sub $a c, b c$, quam rectangulum bis sub $a d, d b$, contentum sit Rationale. Quare excessus inter compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium erit Rationale:

Quoniam verò recte $a c, b c$, sunt Media, & tantum inter se potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, Media, & inter se commensurabilia, Compositum quoque ex ipsarum quadratis commensurabile, utriusque quadrato ex $a c, b c$, descripto, ex 16. propos. lib. huius. Ac proinde & Medium ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius.

Non secus demonstrabimus Medium quoque esse compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$.

Medium autem non superat Medium, Rationali, ut vult 27. propos. lib. huius. Quare excessus inter compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium non est Rationale, sed Rationale eum ostendimus. Quod per-absurdum. Quare ipsi $a b$, alia non congruit Media, prater $b c$, quæ toti sit potentia commensurabilis, & quæ cum tota Rationale contineat. Igitur Media Apotoma, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 64. Propos. 82.

MEDIA Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Media Apotoma secunda $a b$, eique congruens $b c$, toti $a c$, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub $a c, b c$, Medium. Dico ipsi $a b$, nullam aliam Mediam congruere posse, quæ toti sit etiam commensurabilis potentia, & quæ Medium cum tota contineat. Si enim fieri potest, congruat illi alia Media $b d$, quæ etiam toti $a d$, sit commensurabilis potentia, & quæ cum tota $a d$, rectangulum Medium contineat.

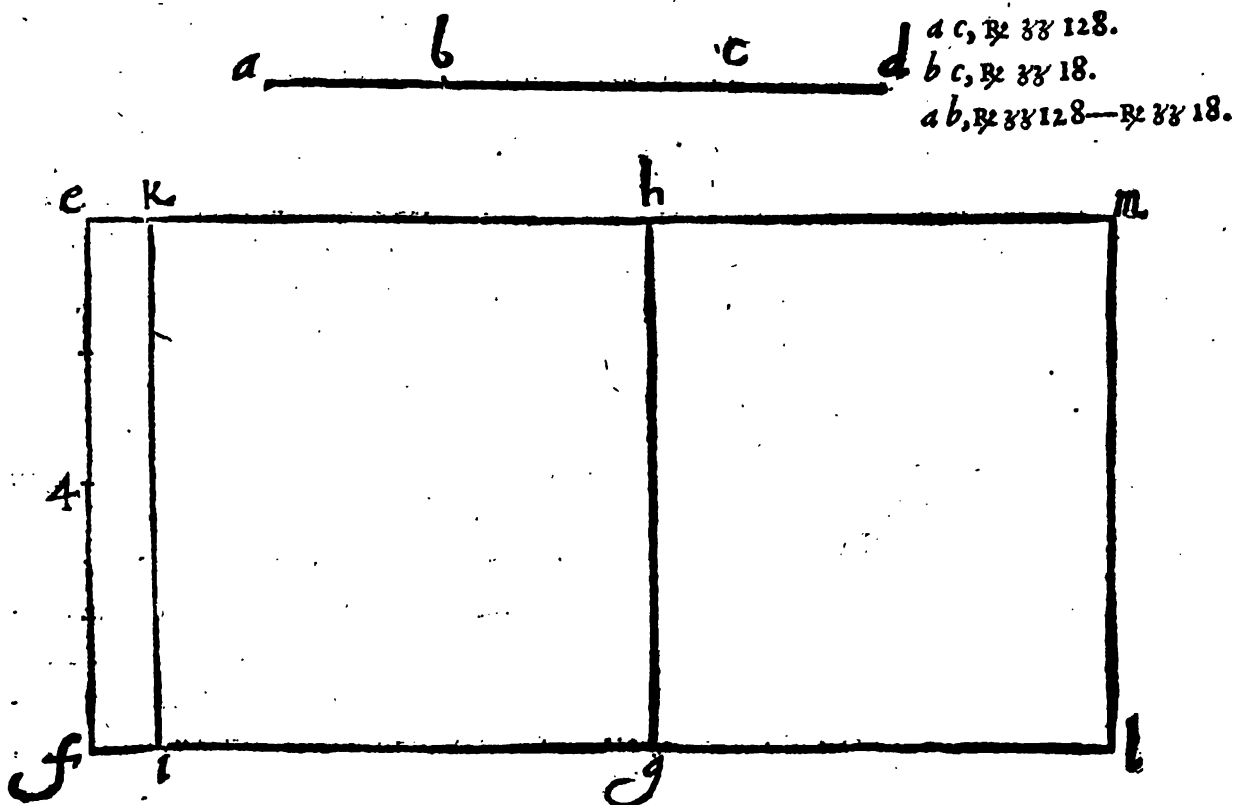
Exponatur deinde Rationalis $e f$, ad quam applicetur rectangulum $e g$, æquale composito ex rectarum quadratis $a c, b c$, & ad eandem Rationalem aliud rectangulum $e i$ applicetur æquale quadrato ex $a b$: Postremò ad eandem Rationalem $e f$, aliud rectangulum applicetur æquale composito ex rectarum quadratis $a d, d b$, nimirum $e l$.

Igitur cum compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, æquale sit rectangulo bis sub ipsis contento vna cum quadrato ex $a b$, ut constat ex 7. propos. lib. 2. erit rectangulum $k g$, æquale rectangulo bis sub $a c, b c$, comprehenso, eodem modo erit rectangulum $k l$, æquale rectangulo bis sub $a d, d b$, contento.

Quoniam verò $a c, b c$, Mediae sunt, & tantum potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, Media, & inter se commensurabilia, compositum quoque ex ipsarum quadratis, utriusque quadrato ex $a c, b c$, descripto, commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius. & ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius, Medium erit. Quare cum rectangulum $e g$, (æquale composito ex rectarum quadratis $a c, b c$) applicatum sit ad Rationalem $e f$, faciet latitudinem $e h$, Rationalem, sed ipsi Rationali $e f$, longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. lib. huius.

Rursus cum rectangulum bis sub $a c, b c$, comprehensum, sit Medium, cum sit commensurabile rectangulo sub $a c, b c$, contento, ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius, sitque ad Rationalem $k i$, applicatum rectangulum $k g$, illi æquale, faciet latitudinem $k h$, Rationalem, sed Rationali $k i$, longitudine incommensurabilem ex 23. propos. libri huius: Cum autem $a c, b c$, sint Mediae longi-

longitudine inter se incommensurabiles, sitque ut a c , ad b c , ita quadratum ex a c , ad rectangulum sub illis contentum, ut docet lemma 3. Clauij propof. 19. lib. huius, erit quadratum ex a c , rectangulo sub a c , b c , contento incommensurabile.



Rectangulum e g , R 38 242.

Rectangulum k g , R 38 192.

Rectangulum e i , R 38 242 — R 38 192.

Recta e h , R 38 15 $\frac{1}{4}$

Recta k h , R 38 12.

Recta e k , R 38 15 $\frac{1}{4}$ — R 38 12.

Quadrato autem ex a c , commensurabile est ostensum compositum ex rectarum quadratis a c , b c , id est rectangulum e g , illi aequale: Et rectangulo sub a c , b c , contento commensurabile est quoque ostensum, quod bis sub ipsis continetur, videlicet k g . Igitur rectangula e g , k g , incommensurabilia sunt, ut colligitur ex scholio Clauij propof. 14. lib. huius. Recta etiam e h , k h , eandem rationem habentes cum rectangulis, e g , k g , longitudine erunt incommensurabiles, Sed Rationales ostensa sunt recta e h , k h , Rationales igitur sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles.

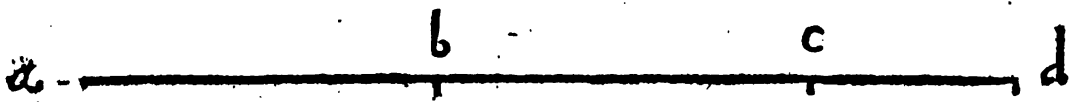
Quare cum à Rationali e h , auferatur Rationalis k h , ei tantum potentia commensurabilis, erit reliqua e k , Apotome & illi congruens k h , Non aliter demonstrabimus e k , esse Apotomen & illi congruentem k m , Igitur Apotome non vna tantum linea recta congruit Rationalis potentia tantum commensurabilis existens toti. Quod est absurdum, vnam enim tantum congruere propof. 80. demonstrauimus. Quocirca Mediae Apotomae secunda, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 65. Propof. 83.

Minori vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

Hh

SIT Minor a , eique congruens b , quæ toti a , sit incommensurabilis potentia faciens compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, quod verò sub ipsis continetur, Medium. Dico ipsi a , b , aliam rectam non congruere, præter b , quæ etiam toti a , sit potentia incommensurabilis, & quæ faciat compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Si fieri potest sit ipsi a , alia b , congruens, quæ toti a , sit potentia incommensurabilis, & quæ faciat, &c.



$$a c, \text{ R } \frac{1}{2} (18 + \text{R } \frac{1}{2} 108.)$$

$$b c, \text{ R } \frac{1}{2} (18 - \text{R } \frac{1}{2} 108.)$$

$$a b, \text{ R } \frac{1}{2} (18 + \text{R } \frac{1}{2} 108) - \text{R } \frac{1}{2} (18 - \text{R } \frac{1}{2} 108.)$$

Quoniam igitur in propof. 80. demonstrauiamus, eundem esse excessum inter compositum ex rectarum quadratis a , b , & compositum ex rectarum quadratis a , d , b , d , qui inter rectangulum bis sub a , b , & rectangulum bis sub a , d , b , d . Sit autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio Clauij propof. 27. lib. huius, cum tam compositum ex rectarum quadratis a , b , quàm compositum ex rectarum quadratis a , d , b , d , Rationale ponatur. Quare excessus inter rectangulum bis sub a , b , & rectangulum bis sub a , d , b , d , spatium erit Rationale: Est autem rectangulum sub a , b , ex hypothesi Medium. Igitur rectangulum bis sub a , b , c , erit ei commensurabile, ut vult 16. propof. lib. huius: Quare ex corollario Clauij propof. 24. lib. huius Medium erit. Pari ratione rectangulum bis sub a , d , b , d , Medium erit.

Medium autem non superat Medium, Rationale, ut constat ex 27. propof. lib. huius: Igitur non erit excessus inter rectangula illa, spatium Rationale. Rationale tamen esse diximus. Quod absurdum. Quare ipsi a , b , nulla præter b , congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantum, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 66. Propof. 84.

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta a , cum Rationali Medium totum efficiens, eique congruens sit b , ipsi a , potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico ipsi a , nullam rectam congruere posse, quæ etiam sit ipsi potentia incommensurabilis, & quæ faciat compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

Si fieri potest sit b , ipsi a , congruens potentia toti a , incommensurabilis, &c.

Igitur cum (ut in propof. 80. lib. huius demonstratum est,) idem sit excessus inter compositum ex rectarum quadratis a , b , & compositum ex rectarum quadratis a , d , b , d , qui inter rectangulum bis sub a , b , & rectangulum bis sub a , d , b , d , comprehensum: Est autem excessus inter rectangula illa, Rationale spatium, ut colligitur ex scholio Clauij propof. 27. lib. huius, cum tam

rectangulum bis sub $a c$, $b c$, quàm rectangulum bis sub $a d$, $d b$, Rationale sit, erit excessus inter composita illa, spatium Rationale.



$$a c, Bz 38 (216 + Bz 872.)$$

$$b c, Bz 38 (216 - Bz 872.)$$

$$a b, Bz 38 (216 + Bz 872.) - Bz 38 (216 - Bz 872.)$$

Est autem ex hypothesi iam compositum ex rectarum quadratis $a c$, $b c$, quàm compositum ex rectarum quadratis $a d$, $b d$, Medium. At Medium non superat Medium, Rationale, ut constat ex 27. lib. huius. Igitur excessus inter composita illa, spatium non est Rationale: Rationale tamen diximus esse. Quod absurdum. Non igitur ipsi $a b$, alia recta congruet, præter $b c$, quæ illi sit potentia incommensurabilis, & quæ faciat compositum ex ipsarum quadratis $a c$, $b c$, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Quare ei quæ cum Rationali Medium totum facit, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 67. Propos. 85.

Et, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta lineæ potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta $a b$, cum Medio Medium totum faciens, & illi congruens sit $b c$, toti $a c$, incommensurabilis potentia faciensque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum etiam sub ipsis, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Dico ipsi $a b$, aliam rectam minime congruere posse, quæ etiam sit toti $a c$, incommensurabilis potentia, & quæ faciat compositum, &c.

Si enim fieri potest sit recta $b d$, congruens, & toti $a d$, incommensurabilis potentia, ita ut compositum ex ipsarum quadratis $a d$, $b d$, sit Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, & incommensurabile composito ex rectarum quadratis $a d$, $b d$.

Iisdem enim constructis, quæ in propo. 82. Quoniam compositum ex rectarum quadratis $a c$, $b c$, Medium est, erit rectangulum $e g$, illi æquale, Medium. Quare cum Medium $e g$, applicatum sit ad Rationalem $e f$, faciet latitudinem $e h$, Rationalem, & ipsi Rationali $e f$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propo. lib. huius.

Rursus cum rectangulum sub $a c$, $b c$, Medium sit, erit & eius duplum ei commensurabile, ut vult 16. propo. lib. huius, ac propterea ex corollario Clauj propo. 24. lib. huius Medium. Igitur Medium erit rectangulum $k g$, illi æquale.

Medium autem $k g$, ad Rationalem $k i$, applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem.

Quare recta $k h$, Rationalis est, & ipsi $k i$, longitudine incommensurabilis, ut vult 23. propo. huius lib. Quoniam verò rectangulum $k g$, commensurabile est rectangulo sub $a c$, $b c$, cum sit illius duplum: sit autem ex hypothesi rectangulum sub $a c$, $b c$, incommensurabile composito ex

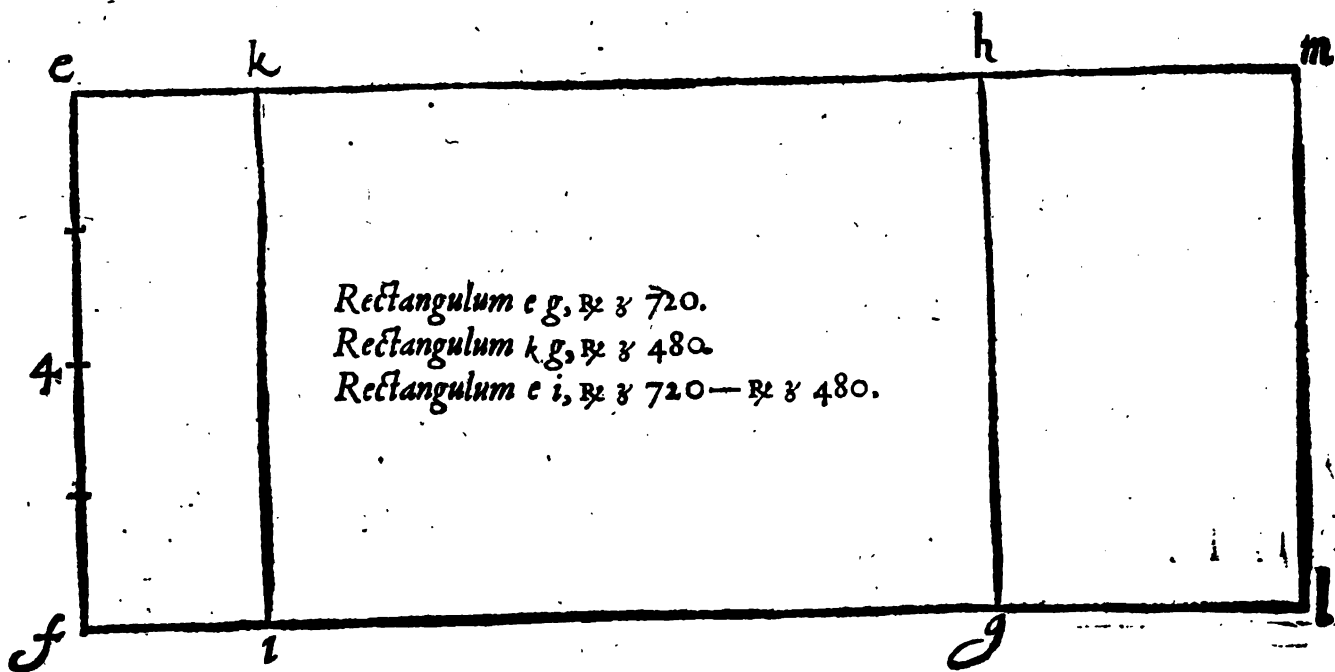
rectarum quadratis $a c, b c$, erit quoque rectangulum $k g$, rectangulo $e g$, quod eidem composito est aequale, incommensurabile, ac proinde recta $e h, k h$, eandem habentes rationem cum rectangulis $e g, k g$, incommensurabiles sunt, ut constat ex 10. propos. lib. huius.

$a \quad b \quad c \quad d$

$a c, R \frac{3}{4} (180 + R \frac{3}{4} 60.)$

$b c, R \frac{3}{4} (180 - R \frac{3}{4} 60.)$

$a b, R \frac{3}{4} (180 + R \frac{3}{4} 60) - R \frac{3}{4} (180 - R \frac{3}{4} 60.)$



Linea Rectanguli.

$e h, R \frac{3}{4} 45.$

$k h, R \frac{3}{4} 30.$

$e k, R \frac{3}{4} 45 - R \frac{3}{4} 30.$

Iam verò Rationales ostensa sunt $e h, k h$, Igitur Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles. Si igitur à Rationali $e h$, Rationalis $k h$, auferatur, quæ potentia tantum sit commensurabilis ipsi $e h$, erit reliqua $e k$, Apotome, & illi congruens $k h$.

Non secus demonstrabimus $e k$, Apotomen esse, etque congruentem $k m$, Igitur Apotome non una tantum congruit recta linea, &c. Quod absurdum, unam enim solum congruere posse demonstravimus, propositione 80. lib. huius. Ei, igitur, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES TERTIAE.



POSITA Rationali, & Apotoma, si tota plus possit, quàm congruens, quadrato, rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Si

I.

II.

III.

III.

V.

Y.I.

SCHOLIUM EX CLAUDIO

Probl. 19: Propos. 86

REPERTIS duobus numeris quadratis a b, & c b, id est 9. & 4. per ea, quæ Clavius docuit in scholio 2. propos. 29. lib. huius, quorum excessus non sit quadratus id est 5. Ita ut 9. & 4. habeant inter se rationem numerorum quadratorum: At 9. & 5. non habeant inter se eandem proportionem. Deinde exposita Rationali quæpiam d, sumatur alia quæ sit ei longitudine commensurabilis nimirum f, Erit igitur f, cum sit commensurabilis Rationali d, exposita, Rationalis.

~~Handwritten notes and scribbles.~~

Fiat deinde ut numerus a , id est 9. ad numerum c , id est 5. ita per corollarium Clauij propof. 6. huius libri quadratum ex e f , ad quadratum ex g f , Dico e g , esse primam Apotomen.

Quoniam enim quadrata ex e f , g f , eandem habent proportionem quam numeri a b , a c , id est 9. & 5. commensurabilia sunt, ut vult 6. propof. lib. huius, erunt recta e f , g f , saltem inter se potentia commensurabiles: Quare cum recta e f , sit ostensa Rationalis, erit & g f , Rationalis:

Cum autem numeri a b , a c , id est 9. & 5. non habeant rationem, quam numeri quadrati habebunt etiam quadrata ex e f , g f , rationem quadratorum numerorum, ac proinde ex 9. propof. lib. huius, longitudine erunt incommensurabiles recta e f , g f . Iam vero Rationales sunt demonstrata. Rationales igitur sunt, & solum potentia inter se commensurabiles: Quare reliqua e g , Apotome est. Dico & primam esse.

Possit enim recta e f , plus, quam recta g f , quadrato recta h , Igitur cum sit ut numerus a b , id est 9. ad numerum 5. Ita quadratum ex e f , ad quadratum ex g f , erit per conuersionem rationis ut a b , ad c b , id est 9. ad 4. ita quadratum ex e f , ad quadratum ex h , habent autem numeri illi rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum: Igitur quadrata ex e f , & h , eandem rationem habebunt inter se, ac propterea & recta, e f , & h , longitudine inter se sunt commensurabiles, ut vult 9. propof. lib. huius.

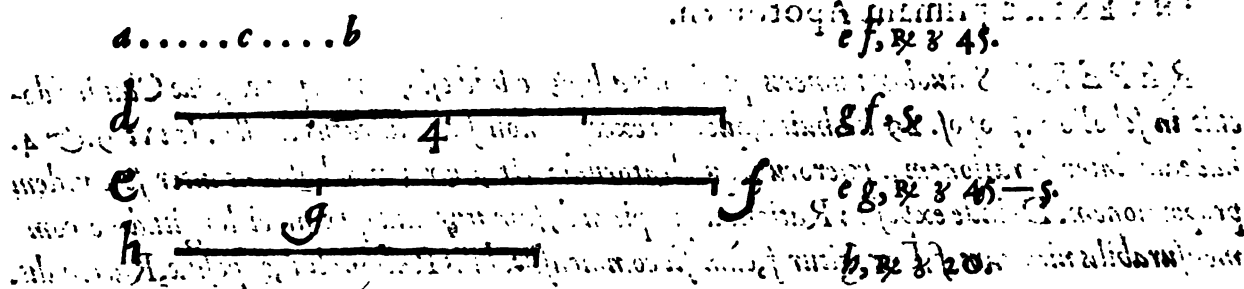
Igitur cum tota e f , plus possit, quam congruens g f , quadrato recta h , sibi longitudine commensurabilis, sitque tota e f , Rationali exposita longitudine commensurabilis, erit a g , ex definitione prima tertiarum definitionum Apotome prima. Inuenta est ergo Apotome prima. Quod erat faciendum.

Probl. 20. Propof. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis a b , c b , ut in propositione precedenti. Exponatur Rationalis d , cui alia sumatur longitudine commensurabilis nimirum g f , Erit igitur g f , Rationalis d , commensurabilis, Rationalis.

Fiat deinde ut numerus a c , ad numerum a b , id est ut 5. ad 9. ita quadratum ex g f , ad quadratum ex e f , per corollarium propof. 6. lib. huius, a Clauio traditum, Dico e g , esse Apotomen secundam.



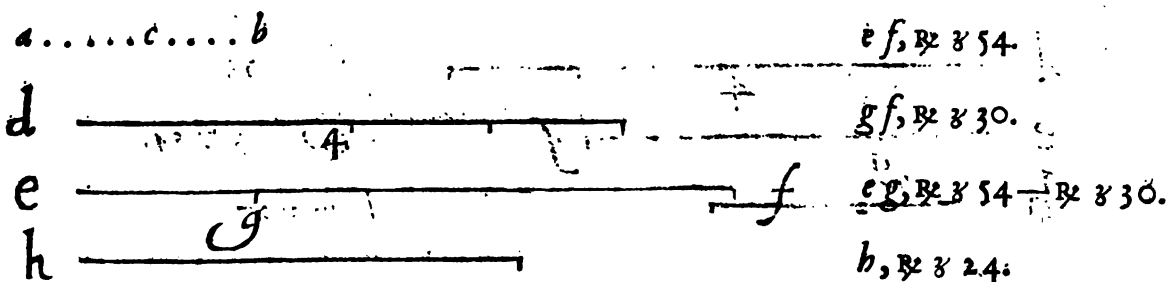
Quoniam enim quadrata ex g f , & e f , eandem habent inter se rationem, quam numeri a c , a b , id est 5. & 9. erunt quadrata illa inter se commensurabilia, ut patet ex 6. propof. lib. huius, ac proinde & recta g f , & e f , saltem commensurabiles potentia. Quare cum g f , sit Rationalis ostensa, erit & e f , Rationalis. Cum vero numeri a c , a b , non habeant Rationem numerorum quadratorum, nec etiam quadrata ex g f , & e f , erunt recta g f , & e f , longitudine incommensurabiles, ut vult 9. propof. lib. huius. Rationales tamen ostensa sunt recta g f , & e f , Rationales igitur sunt, & tantum potentia commensurabiles. Quare e g , reliqua Apotome est. Dico & secundam esse.

Possit enim $e f$, plus, quàm $g f$, quadrato ex h , Igitur cum sit ut numerus $a c$, id est 5 . ad numerum $a b$, id est 9 . Ita quadratum ex $g f$, ad quadratum ex $e f$, & permutando, ut $a b$, id est 9 . ad $a c$, id est 5 . ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, Igitur demonstrabimus ut in antecedenti propositione esse per conuersionem Rationis ut $a b$, ad $c b$, id est 9 . ad 4 . ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , habent autem numeri illi rationem numerorum quadratorum: quare recte concludemus cum propof. 9. lib. huius rectam h , ipsi $e f$, longitudine commensurabilem esse. Quocirca cum tota $e f$, plus possit, quàm congruens $g f$, quadrato recta h , sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens $g f$, Rationali exposita d , longitudine commensurabilis, erit $e g$, ex definitione secunda Apotome. Inuenta est ergo Apotome secunda. Quod erat faciendum.

Probl. 21. Propof. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis, ut in propof. 86. scilicet 9 . & 4 . Sumatur alius numerus i , id est 6 . ut in propositione 51. lib. huius diximus, qui neque ad $a b$, id est 9 . neque ad $a c$, id est 5 . habeat rationem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum. Exponatur deinde Rationalis d , & fiat ut numerus i , id est 6 . ad numerum $a b$, id est 9 . Ita quadratum ex d , Rationali ad quadratum ex $e f$, Illudque agatur ut docet corollarium Clauij propof. 6. lib. huius. Erunt igitur quadrata ex d , & $e f$, eandem rationem inter se habentia, quam numeri i , & $a b$, id est 6 . & 9 . commensurabilia, ut vult 6. propof. lib. huius, recta quoque d , & $e f$, saltem commensurabiles potentia.



Existente ergo d , Rationali, erit $e f$, & i , commensurabilis Rationali. Quoniam vero numeri i , & $a b$, id est 6 . & 9 . nec eriam quadrata ex d , & $e f$, rationem habent numerorum quadratorum, erunt ex propof. 9. lib. huius recta d , & $e f$, longitudine inter se incommensurabiles.

Rursus fiat ut $a b$, ad $a c$, id est ut 9 . ad 5 . ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, illudque fiat ut docet corollarium Clauij propof. 6. lib. huius. Dico $d g$ esse Apotomen. Nam cum quadrata ex $e f$, & $g f$, habeant inter se eandem rationem, quam numeri $a b$, & $a c$, id est, quam 9 . & 5 . sint commensurabilia, erunt recta $e f$, & $g f$, saltem inter se commensurabiles potentia. Quare cum $e f$, sit Rationalis ostensa, erit & $g f$, & commensurabilis, Rationalis:

Quoniam vero numeri $a b$, & $a c$, id est 9 . & 5 . nec eriam quadrata ex $e f$, & $g f$, habeant rationem, quam numeri quadrati habent, erunt recta $e f$, & $g f$, longitudine incommensurabiles, ut vult 9. propof. lib. huius: Iam vero Rationales sunt demonstrata $e f$, & $g f$, Rationales igitur sunt, & tantum commensurabiles potentia. Quare cum ex $e f$, auferatur $g f$, illi tantum potentia commensurabilis, erit reliqua $e g$, Apotome, ut constat ex 74. propof. lib. huius. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, ut i , ad $a b$, id est ut 6 . ad 9 . ita quadratum ex d , ad quadratum ex $e f$, & ut $a b$, ad $a c$, id est ut 9 . ad 5 . ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, erit ex aequo, ut i , ad

a, c , id est ut 6. ad 5. ita quadratum ex d , ad quadratum $g f$. Sed numeri i , & $a c$, id est 6. & 5. non habent rationem, quam numeri quadrati habent. Quare nec quadrata ex d , & $g f$, habebunt rationem numerorum quadratorum. Quare d , & $g f$, sunt inter se incommensurabiles longitudine, ex 9. propos. lib. huius ac proinde neutra ipsarum $e f$, $g f$, Rationali d , exposita longitudine est commensurabilis.

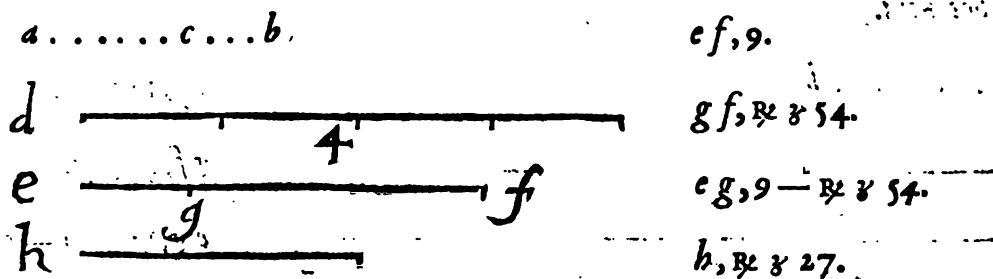
Iam verò recta $e f$, plus possit, quam $g f$, quadrato rectæ h , demonstrabimus igitur ut in propos. 86. rectam h , ipsi $e f$, esse longitudine incommensurabilem, ac propterea cum tota $e f$, plus possit, quam congruens $g f$, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum Rationali d , exposita longitudine commensurabilis existat, erit ex definitione reliqua $e g$, Apotome tertia. Inuenimus igitur tertiam Apotomen. Quod erat faciendum.

Probl. 22. Propos. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

INVENTIS duobus numeris non quadratis a, c , b , id est 6. & 3. ita ut compositus ex illis $a b$, id est 9. ad neutrum ipsorum habeat rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum, ut docuit Clavius in scholio 3. propos. 29. lib. huius.

Exponatur deinde Rationalis quæpiam d , cui alia sumatur longitudine commensurabilis, sitque $e f$, erit igitur $e f$. Rationalis, & reliqua construantur, ut in propos. 86. Demonstrabimus, ut ibi, rectam $e g$, esse Apotomen. Dico & quartam esse.



Possit enim $e f$, plus quam $g f$, quadrato rectæ h , Quoniam igitur est ut $a b$, ad $a c$, id est ut 9. ad 6. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, erit per conversionem rationis, ut numerus $a b$, id est 9. ad numerum $a c$, id est 6. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$. Quare cum numeri $a b$, $a c$, id est 9. & 6. non habeant rationem, quam quadrati numeri habent inter se, nec etiam quadrata ex $e f$, & $g f$, erunt ex 9. definitione lib. huius rectæ $e f$, & h , longitudine incommensurabiles.

Quoniam vero $e f$, plus potest, quam illi congruens $g f$, quadrato rectæ h , sibi longitudine incommensurabilis, sitque $g f$, Rationali d , exposita longitudine commensurabilis, erit ex definitione reliqua $e g$, Apotome quarta. Inventa est ergo Apotome quarta. Quod erat faciendum.

Probl. 23. Propos. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.


INVENTIS (reperita figura antecedentis propos.) duobus numeris non quadratis a, c , b , id est 6. & 3. fiat constructio ut in propos. 87. hoc est sumatur $g f$, Rationali exposita d , longitudine commensurabilis, ostendemus igitur ut ibi rectam $e g$, Apotomen esse. Dico & quintam esse.

esse. Possit enim $e f$, plus, quam $g f$, quadrato rectæ h .

$a \dots c \dots b$

d , 

e 

h 

$e f$, $\text{Bz } 854$.

$g f$, 6 vel $\text{Bz } 36$.

$e g$, $\text{Bz } 54 - 6$.

h , $\text{Bz } 18$.

Igitur ut in 87. propos. demonstrabimus per conuersionem rationis esse vti numerus $a b$, id est 9. ad numerum $c b$, id est 3. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , eruntque ut in antecedenti propos. rectæ $e f$, & h , longitudine inter se incommensurabiles. Quare cum congruens $g f$, Rationali d , expositæ longitudine sit commensurabilis, erit ex definitione $e g$, Apotome quinta. Inuenta est ergo Apotome quinta. Quod erat faciendum.

Probl. 24. Propos. 91.

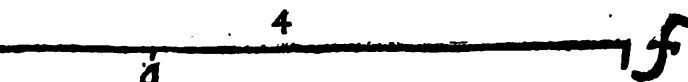
INVENIRE sextam Apotomen.


REPERTIS tribus numeris $a c$, $c b$, & i , id est 7. 5. & 9. ut in propos. 54. ita ut $a b$, id est 12. ad neutrum ipsorum nimirum ad $a c$, $c b$, id est 7. & 5. habeat rationem numeri quadrati ad numerum quadratum.

$a \dots c \dots b$

$i \dots$

d 

e 

h 

$e f$, $\text{Bz } 108$.

$g f$, $\text{Bz } 63$.

h , $\text{Bz } 45$.

$e g$, $\text{Bz } 108 - \text{Bz } 63$.

Deinde exposita Rationali d , reliqua fiant ut in propos. 88. ostendemus igitur pari medio, quo ibi vsi sumus, rectas d , & $e f$, esse inter se longitudine incommensurabiles, & rectam $e g$, esse Apotomen. Dico & sextam esse, Erunt enim ut in propos. 88. rectæ d , & $g f$, longitudine incommensurabiles, Atque adeo neutra illarum $e f$, $g f$, Rationali d , expositæ longitudine commensurabilis existit. Iam verò $e f$, plus possit, quam $g f$, illi congruens quadrato rectæ h , Igitur demonstrabimus pari medio, quo vsi sumus propos. 89. rectam h , longitudine incommensurabilem esse rectæ $e f$. Quare cum tota $e f$, plus possit, quam congruens $g f$, quadrato rectæ h , sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum Rationali d , expositæ longitudine commensurabilis existat, erit rectæ $e g$, ex definitione Apotome sexta. Inuenta est ergo Apotome sexta. Quod erat faciendum.

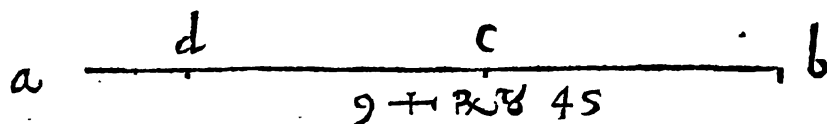
SCHOLIUM EX CLAVIO.

SED & expediatis sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

Sit inuenienda exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima $a b$, cuius maior nomen a , & minor b , 49. de-
mus $c b$, Abscissa igitur ex $a c$, rectæ $c d$, quæ æqualis sit ipsi $c b$: Dico $a d$, esse primam Apotomen. Quoniam enim $a c$, $c b$, Rati-
onales sunt potentia tantum commensurabiles, erunt etiam $a c$, $d c$, Rationales potentia tantum commensurabiles. Est ergo $a d$, 74. de-
Apotome. Et quia $a c$, plus potest, quam $c b$, hoc est quam $d c$, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est $a c$, cimi.
Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur, erit ex definitione

Kk

Apotoma prima a d, prima Apotome. Eadem ratione ex ceteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas invenie-

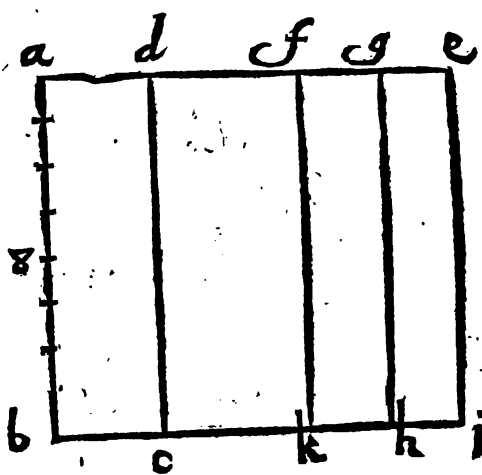


mus, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

Theor. 68. Propos. 92.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens, Apotome est.

CONTINEATUR spatium a c, sub Rationali a b, & Apotome prima a d, Dico rectam lineam, quæ spatium a c, potest esse Apotomen. Sit recta d e, linea, quæ congruit ipsi Apotome a d, erunt ergo a e, & d e, ex definitione Apotomæ primæ Rationales, & inter se tantum potentia commensurabiles, & tota a e, Rationali exposita longitudine erit commensurabilis, & denique a e, plus poterit, quàm d e, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.



Linea prima figura.

a e, 9.
a d, 9 — Bz 3. 45.
d e, Bz 3. 45.
a g, $7\frac{1}{2}$
g e, $1\frac{1}{2}$
d f, Bz 3. 11. $\frac{1}{4}$

Rectangula.

a i, 72.
a h, 60.
g i, 12.
d k, Bz 3. 720.

a c, 72 — Bz 3. 2880.
Rectangulum sub a g, g e, $11\frac{1}{4}$

Linea secunda figura.

t o, Bz 3. 60.
f o, Bz 3. 12.
t f, Bz 3. 60 — Bz 3. 12.

Quadrata.

l m, 60. n o, 12.

t r, 72 — Bz 3. 2880.

Secetur d e, bifariam in f, & quadrato ex f e, hoc est, quarta parti quadrati ex d e, applicetur ad a e, rectangulum aequale, sitque quod sub rectis a g, g e, continetur. Igitur cum a e, plus possit, quàm d e, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, erunt ex 18. propos. lib. huius recta a g, g e, commensurabiles longitudine, ac proinde ex 16. propos. lib. huius, tam a g, quàm g e, ipsi a e, longitudine erit commensurabilis sed a e, rationali a b, exposita est commensurabilis longitudine. Quare recta a g, g e, Rationali a b, longitudine erunt etiam commensurabiles, ut vult 12.

propos. lib. huius. Ac propterea ex 6. definitione lib. huius, Rationales erunt $a g, g e$. Igitur si recta $g h, \& e i$, ducantur, quae ipsi Rationali $a b$, sint parallelae, erit utrumque rectangulum $a h, \& g i$, Rationale, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Rursus cum recta $d f, f e$, longitudine sint commensurabiles ipsi $d e$, sitque eadem $d e$, Rationali $a b$, incommensurabilis longitudine (Si enim essent $a b, \& d e$, inter se longitudine commensurabiles, cum $a e$, Rationali $a b$, exposita longitudine sit commensurabilis, essent etiam $a e, d e$, commensurabiles longitudine. Quod esset absurdum, ponuntur enim non esse, sed tantum potentia commensurabiles) erit etiam tam $d f$, quam $f e$, Rationali $a b$, longitudine incommensurabilis: Quoniam verò recta $d f, f e$, Rationali $d e$, sunt commensurabiles ostensa, erunt recta $d f, f e$, Rationales: Igitur ducta $f k$, ipsi $a b$, parallela, erunt rectangula $d k, f i$, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media, ut vult 22. propos. lib. huius.

Iam verò ipsi rectangulo $a h$, aequale describatur quadratum $l m$, $\&$ rectangulo $g i$, aliud quadratum describatur illi aequale $n o$, habens angulum communem $l p m$, cum quadrato $l m$, erunt igitur quadrata $l m, n o$, circa eandem diametrum $p q$. Deinde compleatur figura ut vides.

Igitur cum rectangulum sub $a g, g e$, Rationalibus longitudine commensurabilibus, aequale sit quadrato $e f$, erunt tres recta $a g, f e, g e$, continuè proportionales, ut vult 17. propos. lib. 6. Rectangula etiam $a h, f i, g i$, eandem cum ipsis rationem habentia ex 1. propos. lib. 6. erunt proportionalia, $\&$ proinde $f i$, Medium proportionale inter $a h, g i$, hoc est, inter quadrata $l m, n o$, illis aequalia. Sed per lemma Clavi prop. 14. lib. huius, rectangulum $l o$, Medium est etiam proportionale inter quadrata $l m, n o$. Quare rectangula $f i, \& l o$, sunt inter se aequalia, ipsi autem rectangulo $f i$, aequale est rectangulum $d k, \&$ rectangulo $l o$, aequale est etiam rectangulum $n m$, ex 36. propos. lib. 1. Quare totum rectangulum $d i$, toti gnomoni $u, y x$, cum quadrato $n o$, est aequale. Est etiam ex constructione rectangulum $a i$, aequale quadratis $l m, n o$. Quare reliquum $a c$, reliquo quadrato $t r$, est aequale: Ac proinde recta $t s$, potest spatium $a c$, contentum sub Rationali $a b, \&$ Apotome prima $a d$. Dico $\&$ Apotomen esse $t s$, Nam cum $a h, g i$, sint Rationalia ostensa, sintque quadrata $l m, n o$, illis aequalia, erunt igitur quadrata illa Rationalia, $\&$ recta $t o, s o$, Rationales.

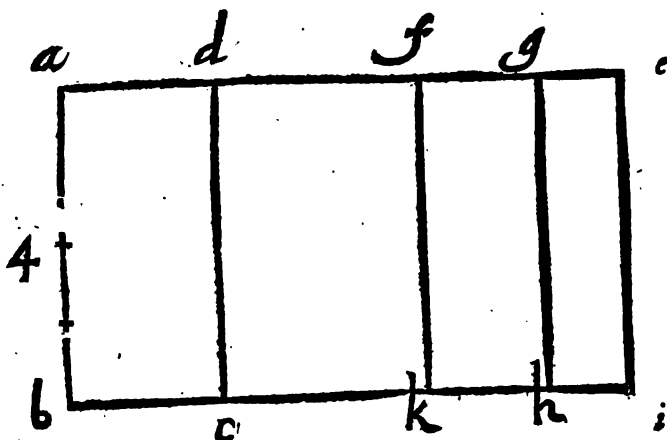
Rursus cum rectangulum $f i$, Medium sit demonstratum, erit $\&$ illi aequale rectangulum $l o$, Medium, idcirco rectangulum $l o, \&$ quadratum $n o$, incommensurabilia erunt, cum vnum sit Rationale, alterum verò Medium: Igitur recta $t o, s o$, eandem cum illis rationem habentes, ex 1. sexti, erunt longitudine incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huius. Auferens igitur à Rationali, $\&$ c. erit reliqua $t s$, Apotome, ut vult 74. propos. lib. huius. Igitur si spatium contineatur sub Rationali, $\&$ Apotoma prima, $\&$ c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 69. Propos. 93.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Media est Apotome prima.

CONTINEATUR spatium $a c$, sub Rationali $a b, \&$ Apotoma secunda $a d$. Dico rectam, quae potest spatium $a c$, Media Apotomen esse primam. Congruat ipsi $a d$, recta $d e$, erunt igitur recta $a c, d e$, Rationales, $\&$ tantum potentia commensurabiles, $\&$ $d e$, longitudine erit commensurabilis Rationali $a b, \&$ denique $a e$, plus poterit, quam $d e$, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, ut constat ex definitione Apotome secundae.

Secetur congruens $d e$, bifariam in puncto f , & reliqua fiant ut in antecedenti propositione, erunt igitur ex 18. propos. lib. huius, recta $a g$, $g e$, longitudine inter se commensurabiles, ut demonstrauimus propositione precedenti, ac proinde tam $a g$, quam $g e$, Rationali $a e$, longitudine commensurabilis. Est autem $a e$, Rationali $a b$, exposita incommensurabilis longitudine (nam



Linea.

$a e$, R. & 45.
 $d e$, 5.
 $a d$, R. & 45—5.
 $a g$, R. & 31 $\frac{1}{4}$.
 $g e$, R. & 1 $\frac{1}{4}$.
 $d f$, R. & 6 $\frac{1}{4}$.

Rectangula.

Rectangulum sub $a g$, $g e$, 6 $\frac{1}{4}$.
 $a c$, R. & 720—R. & 20.
 $d k$, R. & 100. vel 10.
 $a h$, R. & 500.
 $g i$, R. & 20.
 $a i$, R. & 720.
 $f b$, 10—R. & 20.

Linea Quadratorum.

$t o$, R. & 88 500.
 $f o$, R. & 88 20.
 $t s$, R. & 88 500—R. & 88 20.
 Quadrata.
 $l m$, R. & 500.
 $n o$, R. & 20.
 $t r$, R. & 720—R. & 20.

si $a e$, ipsi $a b$, longitudine commensurabilis esset, cum recta $d e$, ipsi $a b$, ponatur commensurabilis longitudine, essent & $a e$, $d e$, longitudine quoque commensurabiles. quod esset contra hypothesein, ponuntur enim tantum potentia commensurabiles. Quare tam $a g$, quam $g e$, Rationali $a b$, longitudine est incommensurabilis.

Iam verò tam $a g$, quam $g e$, Rationali $a e$, longitudine est ostensa commensurabilis, Igitur Rationales sunt $a g$, $g e$, & tam $a b$, $a g$, quam $a b$, $g e$, Rationales sunt, sed tantum potentia inter se commensurabiles, Ac propterea rectangula $a h$, & $g i$, sub Rationalibus tantum potentia commensurabilibus contenta, Media sunt, ut vult 22. propos. lib. huius.

Rursus $d e$, secta sit bifariam in f , erunt $d f$, $f e$, ipsi $d e$, longitudine commensurabiles. Quare cum $d e$, Rationali $a b$, longitudine sit commensurabilis ex hypothesi, erunt ipsi $a b$, commensurabiles longitudine recta $d f$, $f e$, ac proinde & Rationales. Quare rectangula $d k$, $f i$, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta, Rationalia erunt, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Facile igitur colligitur, ut in antecedenti propos. rectam $t s$, posse spatium $a c$, sub Rationali $a b$, & Apotome secunda $a d$, contentum. Dico $t s$, Medie Apotomen esse primam. Nam cum $a g$, $g e$, inter se sint commensurabiles longitudine, erunt rectangula $a h$, $g i$, eandem cum illis rationem habentia, commensurabilia, ut constat ex 10. propos. lib. huius, ac proinde & quadrata $l m$, $n o$, quae illis sunt equalia ex constructione erunt inter se commensurabilia. Quare linea quadratorum $l m$, $n o$, saltem erunt potentia commensurabiles. Sunt autem linea illae Media, cum possint

possint spacia Media, nimirum rectangulum ab , & rectangulum gi , quae Media esse demon-
strauimus.

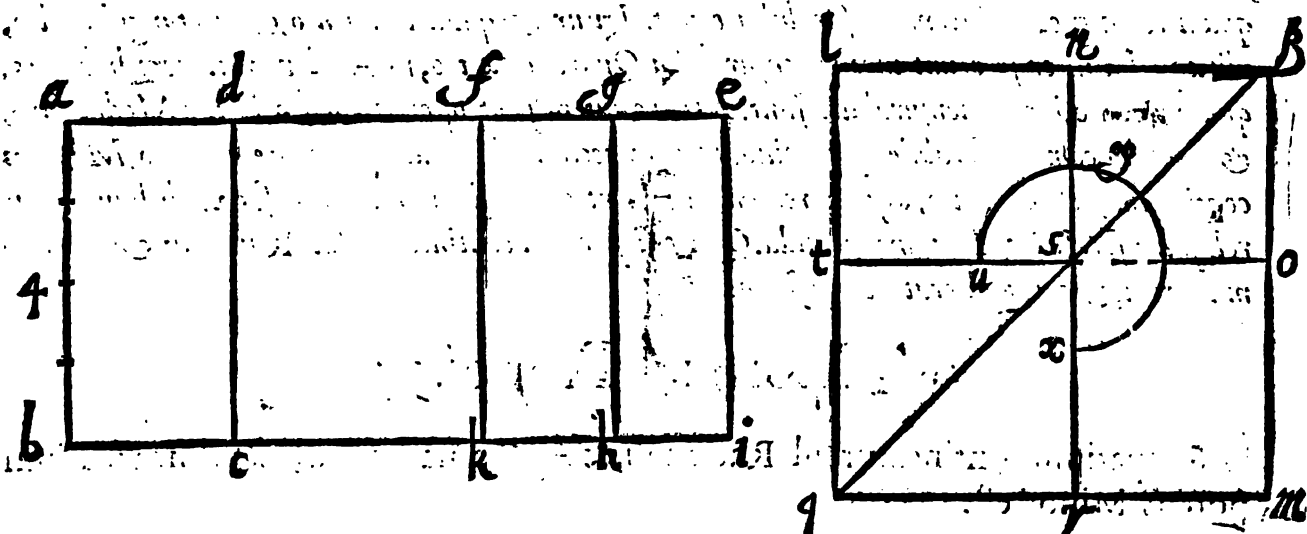
Quoniam vero rectangulum fi , ac sibi aequale io , Rationalia sunt erunt rectangula illa
quadrato Rationali no , incommensurabilia. Quare recta to , so , eandem cum illis Rationem
habentes longitudine sunt incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huius. Cum igitur so , fo ,
Media sint ostensa, & commensurabiles erunt to , so , Media, & tantum potentia commensu-
rabiles, quacum contineant rectangulum sub ipsis nimirum io , Rationale, erit t reliqua Me-
dia Apotome prima. Igitur si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c.
Quod erat ostendendum.

Theor. 79. Propos. 94.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium
potens, Mediae est Apotome secunda.

CONTINEATUR spatium ac , sub Rationali ab , & Apotoma tertia ad , Dico
rectam, quae spatium ac , potest esse Media Apotomen secundam.

Congruae ipsi ad , recta bc , erunt igitur ae , de , Rationales, & eandem potentia inter se
commensurabiles, & neutra ipsarum ae , de , Rationali ab , exposita longitudine erit commen-
surabilis, & denique ae , plus poterit, quam de , quadrato rectae sibi commensurabilis longitu-
dine.



Lineae.	Rectangula.	Lineae quadratorum.
ae , Bz 54.	Rectangulum sub ag , ge , 7 $\frac{1}{4}$.	io , Bz 600.
de , Bz 30.	ai , Bz 864.	np , Bz 24.
ag , Bz 37 $\frac{1}{4}$.	dk , Bz 120.	tf , Bz 600 — Bz 24.
ge , Bz 1 $\frac{1}{4}$.	ah , Bz 600.	Quadrata.
ad , Bz 54 — Bz 30.	gi , Bz 24.	lm , Bz 600.
df , Bz 7 $\frac{1}{4}$.	ac , Bz 864 — Bz 480.	no , Bz 24.
		tr , Bz 864 — Bz 480.

Secunda sic d , e , bifariam in puncto f , & reliqua construantur, ut in propos. 92. erunt igitur ut
Ll

ibi a, g, g, e , longitudine commensurabiles, ut vult 18. propos. lib. huius, ac proinde tam a, g , quam g, e , Rationali a, e , longitudine commensurabilis. Est autem a, e , Rationali a, b , incommensurabilis longitudine ex hypothesi. Quare cum tam a, g , quam g, e , Rationali a, e , sit ostensa commensurabiles. Igitur rectangula a, h, g, i , contenta sub Rationalibus tantum potentia inter se commensurabilibus, Media sunt, ut vult 22. propos. lib. huius.

Rursus cum congruent d, e , longitudine sit, incommensurabilis Rationali a, b , exposita ex hypothesi, erunt quoque recte d, f, f, e , quae ipsi d, e , longitudine sunt commensurabiles, ipsi a, b , longitudine incommensurabiles, quare tam a, b, d, f , quam a, b, f, e , Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles, ac proinde rectangula d, k, f, i , sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus contenta, Media, ut vult 22. propos. lib. huius.

Facile nunc demonstrabitur, ut in antecedenti propositione rectam t, s , posse spatium a, c , contentum sub Rationali a, b , & Apotoma secunda a, d , Dico t, s , esse Media Apotomen secundam. Nam cum rectangula a, h, g, i , Media sint ostensa, erant quadrata l, m, n, o , illis aequalia, Media; recta quoque t, o, s, o , potentes spatia Media, Media erunt. Cum autem rectangula a, h, g, i , eandem rationem habeant, quam recta a, g, g, e , ex 1. sexti. Sunt autem recta a, g, g, e , commensurabiles ostensa, erunt & rectangula a, h, g, i , inter se commensurabilia, ac propterea & quadrata l, m, n, o , illis aequalia, commensurabilia erunt, recta quoque t, o, s, o , satrem potentia commensurabiles. Quia vero recta a, e, d, e , sunt tantum potentia inter se commensurabiles, sitque g, e , ostensa commensurabilis longitudine Rationali a, e , sed Rationali d, e , longitudine est commensurabilis ipsius dimidia f, e , erunt ex scholio Clavi prop. 14. lib. huius recta g, e, f, e , longitudine incommensurabiles, ac propterea rectangula g, i, f, i , eandem habentia rationem, quam recta g, e, f, e , incommensurabilia erunt. Igitur & quadratum n, o , & rectangulum l, o , illis aequalia inter se erunt incommensurabilia. Quare recta t, o, s, o , eandem rationem habentes, quam l, o, n, o incommensurabiles sunt. Media autem sunt ostensa t, o, s, o . Igitur Media sunt, & tantum commensurabiles potentia, quae cum rectangulum sub ipsis contentum l, o , Medium contineant, (est enim l, o , aequale rectangulo f, i , ut demonstravimus prop. 22. lib. huius) erit reliqua t, s , Media Apotome secunda. Quare si spatium contineatur sub Rationali & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 71. Propos. 95.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATUR spatium a, c , sub Rationali a, b , & Apotoma quarta a, d , Dico rectam, quae spatium a, c , potest esse Minorem.

Congruat ipsi a, d , recta d, e , erunt igitur a, e, d, e , Rationales, & potentia solum commensurabiles, & a, e , Rationali a, b , exposita longitudine erit commensurabilis, & denique a, e , plus poterit, quam d, e , quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, ut constat ex definitione Apotoma quarta.

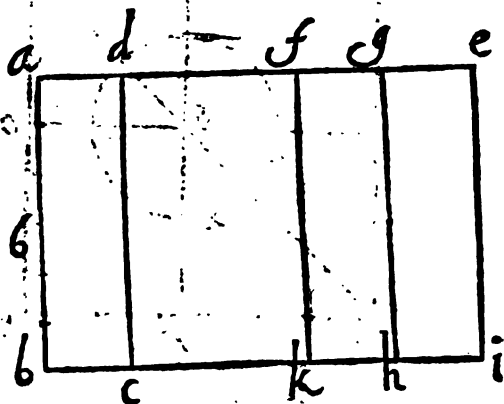
Secetur d, e , bisariam in puncto f , & cetera fiant ut superius. Erunt igitur a, g, g, e , longitudine incommensurabiles, ut constat ex 19. propos. lib. huius. Cum a, e , plus possit, quam d, e , quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, sitque ad maiorem a, e , applicatum parallelogramum aequale quarta parti ex minore d, e , descripti, deficiens figura quadrata.

Quoniam vero a, e , Rationalis est, & Rationali a, b , exposita longitudine commensurabilis,

erit rectangulum $a i$, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contentum, Rationale, ut constat ex 20. propof. libri huius.

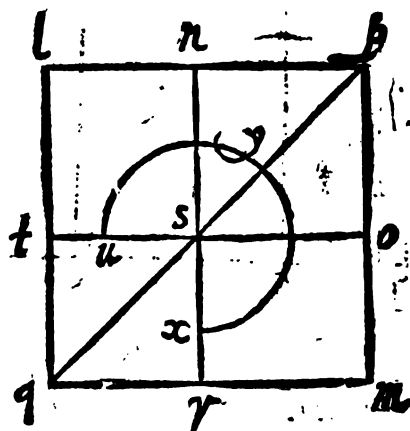
Rurſus cum $d e$, ſit Rationalis, & Rationali $a b$, tantum commensurabilis potentia, hoc eſt, incommensurabilis longitudine, erunt rectangula $d i$, $f i$, Media ut conſtat ex 22. propof. lib. huius. Quoniam verò recta $a g$, $g e$, longitudine incommensurabiles ſunt demonſtrate, erunt rectangula $a h$, $g i$, eandem habentia rationem inter ſe, quam recta $a g$, $g e$, incommensurabilia.

Nunc igitur facillimè demonſtrabimus, ut in propof. 92. rectam $t ſ$, poſſe ſpatium $a c$, conſentum ſub Rationali $a b$, & Apotoma quarta $a d$, Dico $t ſ$, Minorem eſſe.



Lineæ.

Rectangula.



Lineæ Quadratorum.

$a e, 9.$	Rectangulum ſub $a g, g e$ $13 \frac{1}{2}$	$t o, R \frac{8}{3} (27 + R \frac{8}{3} 243.)$
$d e, R \frac{8}{3} 54.$	$a i, 54.$	$t ſ, R \frac{8}{3} (27 - R \frac{8}{3} 243.)$
$a g, \frac{1}{2} + R \frac{8}{3} 6 \frac{1}{2}$	$a h, 27 + R \frac{8}{3} 243.$	$l m, 27 + R \frac{8}{3} 243.$
$g e, \frac{1}{2} - R \frac{8}{3} 6 \frac{1}{2}$	$g i, 27 - R \frac{8}{3} 243.$	$n o, 27 - R \frac{8}{3} 243.$
$d f, R \frac{8}{3} 13 \frac{1}{2}$	$d k, R \frac{8}{3} 486.$	$t r, 54 - R \frac{8}{3} 1944.$
$a d, 9 - R \frac{8}{3} 54.$	$a c, 54 - R \frac{8}{3} 1944.$	

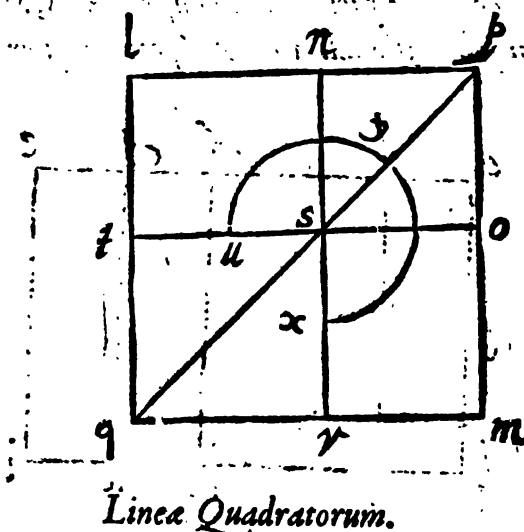
Quoniam enim ex conſtructione rectangulum $a i$, æquale eſt composito ex quadratis $l m, n o$, rectarum $t o, ſ o$, ſit autem rectangulum $a i$, Rationale oſtenſum, erit & compositum illud illi æquale, Rationale: Quoniam verò rectangulum $f i$, Medium eſſe demonſtrauiſmus, erit & $l o$, illi æquale, Medium. Poſtremo cum rectangula $a h, g i$, ſint inter ſe incommensurabilia demonſtrata, erunt & quadrata $l m, n o$, illis æqualia, incommensurabilia, ac proinde & recta $t o, ſ o$, potentia incommensurabiles. Quare cum recta $t o, ſ o$, ſint incommensurabiles potentia, faciãtque compositum ex ipſarum quadratis, Rationale, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, erit reliqua $t ſ$, Minor, ut vult 77. propof. lib. huius. Igitur ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod erat demonſtrandum.

Theor. 72. Propof. 96.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens, eſt quæ cum Rationali Medium totum efficit.

SIT contentum ſpatium $a c$, ſub Rationali $a b$, & Apotoma quinta $a d$, Dico rectam, quæ ſpatium $a c$, poterit eſſe, quæ cum Rationali Medium totum facit.

Sit recta $d e$, congruens ipsi $a d$, erunt igitur $a e, d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & $d e$, Rationali $a b$, exposita longitudine erit commensurabilis, & denique $a e$, plus poterit, quam $d e$, quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex definitione Apotome quinta. Secta sit $d e$, bifariam in puncto f , & reliqua fiant ut superius. Erunt igitur ut in propos. antecedenti recta $a g, g e$, longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius.



$a e$, Bz 854. Rectangulum sub $a g, g e$, 9.
 $d e$, 6. $a i$, Bz 864.
 $a g$, Bz 8 $\frac{11}{4}$ + Bz 8 $\frac{11}{4}$ $a b$, Bz 8 216 + Bz 8 72.
 $g e$, Bz 8 $\frac{11}{4}$ - Bz 8 $\frac{11}{4}$ $g i$, Bz 8 216 - Bz 8 72.
 $a d$, Bz 8 54 - 6. $d k$, 12. & $f i$, 12.
 $a c$, Bz 8 864 - 24.

$t o$, Bz 88 (216 + Bz 8 72.)
 $f o$, Bz 88 (216 - Bz 8 72.)
 $t s$, Bz 88 (216 + Bz 8 72) - Bz 88
 Quadrata. (216 - Bz 8 72.)
 $l m$, Bz 8 216 + Bz 8 72.
 $n o$, Bz 8 216 - Bz 8 72.
 $t r$, Bz 8 864 - 24.

Quoniam vero Rationalis $a e$, Rationali exposita $a b$, incommensurabilis est longitudine, ut iam praediximus propos. 93. erit rectangulum $a i$, sub duabus potentia inter se tantum commensurabilibus contentum, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius. Cum autem rectangulum $d i$, ac proinde & eius dimidium $d k$, sit contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, nimirum sub $d c$, quae Rationali $a b$, est aequalis, & sub $d e$, quae eidem Rationali $a b$, longitudine commensurabilis est ostensa, erit ex 20. propos. lib. huius $d i$, Rationale.

Rursus rectangula $a b, g i$, erunt (ut ostensum est in propos. antecedenti) incommensurabilia, recta quoque $t s$, poterit spatium $a c$, contentum sub Rationali $a b$, & Apotoma quinta $a d$, ut demonstravimus propos. 92. lib. huius. Dico rectam $t s$, eam esse, quae cum Rationali Medium totum efficit. Nam cum rectangulum $a i$, demonstratum sit Medium, erit & compositum ex quadratis $l m, n o$, rectarum $t o, s o$, illi aequale ex constructione Medium. Sed cum rectangulum $f i$, Rationale sit ostensum, erit & rectangulum sub rectis $t o, s o$, contentum nimirum $l o$, Rationale, cum illi sit aequale.

Incommensurabiles autem potentia sunt $t o, s o$, ut colligitur ex demonstratione antecedenti. Igitur cum $t o, s o$, sint rectae incommensurabiles potentia, faciantque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale, erit ex propos. 78. lib. huius reliqua $t s$, eam, quae cum Rationali Medium totum facit. Quare si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat ostendendum.

Theor.

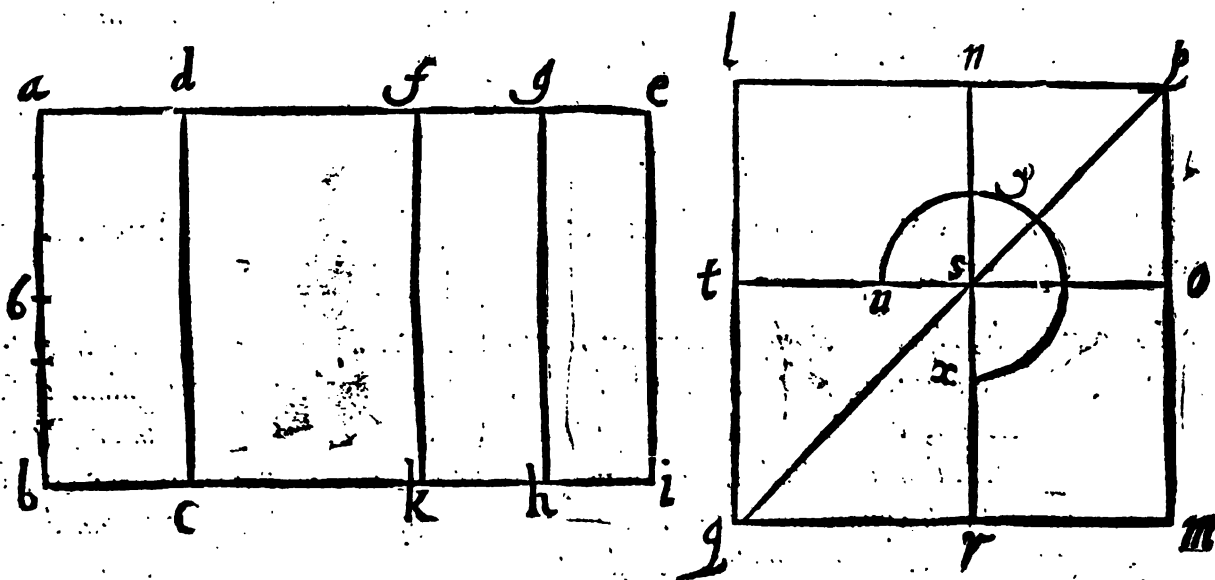
Theor. 73. Propos. 97.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens, est quæ cum Medio Medium totum efficit.

SIT spatium $a c$, contentum sub Rationali $a b$, & Apotoma sexta $a d$, Dico rectam, quæ spatium $a c$, potest eam esse, quæ cum Medio Medium totum facit.

Congruat ipsi $a d$, recta $d e$, erunt igitur $a e$, $d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & neutra ipsarum Rationali $a b$, exposita longitudine erit commensurabilis, & denique $a e$, plus poterit, quam $d e$, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, ut constat ex definitione Apotoma sexta.

Secetur $d e$, bisariam in puncto f , & reliqua fiant ut prius. Erunt igitur recta $a g$, $g e$, incommensurabiles longitudine, ut vult 19. propos. lib. huius.



Lineæ.

Rectangula.

Lineæ Quadratorum.

$a e$, Bz 8 108.	Rectangulum sub $a g$, $g e$, 15 $\frac{1}{4}$	$t o$, Bz 88 (972 + Bz 8 405.
$d e$, Bz 8 63.	$a i$, Bz 8 3888.	o , Bz 88 (972 - Bz 8 405.
$a g$, Bz 8 $\frac{108}{4}$ + Bz 8 $\frac{41}{4}$	$a h$, Bz 8 972 + Bz 8 405.	$t r$, Bz 88 (972 - Bz 8 405) - Bz 88 (972
$g e$, Bz 8 $\frac{108}{4}$ - Bz 8 $\frac{41}{4}$	$g i$, Bz 8 972 - Bz 8 405.	Quadrata - Bz 8 405)
$d f$, Bz 8 15 $\frac{1}{4}$	$d k$, Bz 8 567.	$l m$, Bz 8 972 + Bz 8 405.
$a d$, Bz 8 108 - Bz 8 63.	$a c$, Bz 8 3888 - Bz 8 2268.	$n o$, Bz 8 972 + Bz 8 405.
		$t r$, Bz 8 3888 + Bz 8 2268.

Quoniam verò $a e$, & $d e$, Rationales sunt ex hypothesis & utraque Rationali $a b$, exposita longitudine incommensurabilis, erunt rectangula $a i$, & $d i$, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media, ut docet 22. propos. lib. huius, ac proinde rectangulū $f i$, dimidium ipsius $d i$, Medium quoque erit, ut ~~superius est a nobis demonstratum.~~

Rectangula quoque $a h$, $g i$, erunt inter se incommensurabilia, ut vult propos. 95. lib. huius.

Quoniam verò $a e$, $d e$, Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles, erunt rectangula $a i$, $d i$, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media ex 22. pro-

M m

pos. lib. huius. Quare cum rectangula $d i$, $f i$, sint inter se commensurabilia ostensa, erit $f i$, rectangulo $a i$, incommensurabile.

Facilime igitur demonstrabitur ut in propof. 92. lib. huius rectam $t s$, posse spatium contentum sub Rationali $a b$, & Apotoma sexta $a d$, Dico eam esse, quæ cum Medio Medium totum facit. Nam cum rectangulum $a i$, Medium sit ostensum erit compositum ex quadratis $l m$, $n o$, rectarum $t o$, $s o$, illi æquale, Medium. Rursus cum rectangulum $f i$, Medium sit demonstratum, erit & illi æquale rectangulum $l o$, Medium. Cum autem rectangula $a i$, & $f i$, ostensa sint incommensurabilia, erunt quoque rectangulum $l o$, sub $t o$, $s o$, contentum, & compositum ex quadratis rectarum $t o$, $s o$, incommensurabilia (est enim rectangulum $l o$, rectangulo $f i$, æquale, & rectangulum $a i$, composito ex rectarum quadratis $t o$, $s o$, etiam æquale est ex constructione.)

Postremo cum $t o$, $s o$, potentia sint incommensurabiles, ut patet ex demonstratione propof. 95. lib. huius, faciuntque compositum ex rectarum quadratis, Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis, erit reliqua $t s$, ex propof. 79. lib. huius, ea quæ cum Medio Medium totum facit. Igitur si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 74. Propof. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT recta $a b$, Apotome, ipsique congruat recta $b c$, ita ut $a c$, $b c$, sint tantum inter se commensurabiles potentia. Exponatur Rationalis $d e$, ad quam applicetur rectangulum $d f$, æquale quadrato ex $a b$, latitudinem faciens $d g$, Dico rectam $d g$, esse Apotomen primam, Rursus ad eandem Rationalem $d e$, aliud rectangulum applicetur $d h$, æquale quadrato ex $a c$, & ad $i h$, quæ Rationali $d e$, est æqualis applicetur rectangulum $i k$, æquale ex $b c$, ita ut totum $d k$, æquale sit composito ex rectarum quadratis $a c$, $b c$. Igitur cum compositum ex rectarum quadra-



Lineæ.

$a c$, Bz 8 60.

$b c$, Bz 8 12.

$a b$, Bz 8 60 — Bz 8 12.

Omnes istæ lineæ, & figura sunt vero numero expressæ propof. 92. lib. huius.

ita $a c$, $b c$, æquale sit rectangulo bis sub $a c$, $b c$, una cum quadrato ex $a b$, ut constat ex 7. lib. 2.

Si quadratum ex a, b , auferatur, & auferatur etiam rectangulum d, f , remanebit rectangulum g, k , rectangulo bis sub a, c, b, c , aequale, ac proinde diuisa g, l , bifariam in m , ductaque m, n , ipsi d, e , parallela, erit rectangulum m, k , aequale rectangulo sub a, c, b, c , contento.

Quoniam verò a, c, b, c , sunt Rationales, erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. Cum autem compositum ex ipsarum quadratis vtrique quadrato ex illis descripto sit commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius, erit compositum illud Rationale, hoc est rectangulum d, k , illi aequale.

Rationale autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, & ipsi Rationali ad quam applicatum est longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huius. Igitur recta d, l , Rationalis est, & Rationali d, e , exposita longitudine commensurabilis.

Deinde cum a, c, b, c , sint Rationales, & tantum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius.

Medium verò ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed Rationali ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Quare latitudo g, l , erit Rationalis, sed Rationali g, f , quæ Rationali d, e , est æqualis incommensurabilis erit longitudine.

Quoniam verò rectangulum d, k , est Rationale ostensum, & rectangulum g, k , Irrationale, erunt rectangula illa inter se incommensurabilia, ac propterea & recta d, l, g, l , eandem cum illis rationem habentes longitudine incommensurabiles, ut vult 10. propos. lib. huius. Sunt autem d, l, g, l , Rationales ostensa. Igitur Rationales sunt d, l, g, l , & tantum commensurabiles potentia. Quare rectè concludemus ex propos. 74. lib. huius reliquam d, g , Apotomen esse. Dico & primam esse. Nam cum ex lemmate Clauij propos. 54. lib. huius, rectangulum sub a, c, b, c , hoc est rectangulum m, k , Medium sit proportionale inter quadrata rectarum a, c, b, c , hoc est inter rectangulum d, h, i, k , illis æqualia, erunt rectangula d, h, m, k, i, k , continue proportionalia, ac proinde & recta d, i, m, l, i, l , eandem proportionem cum illis habentes continue proportionales erunt. Igitur rectangulum sub d, h, i, l , aequale erit quadrato ex m, l , descripto, ut vult 17. propos. lib. 6. hoc est quarta parti quadrati ex g, l .

Quoniam verò quadrata ex a, c, b, c , hoc est rectangula d, h, i, k , illis æqualia sunt inter se commensurabilia, erunt recta d, i, l , eandem rationem habentes cum illis longitudine commensurabiles ut constat ex 10. propos. lib. huius. Igitur cum due recta d, l, g, l , sint inæquales, & ad maiorem d, l , sit applicatum rectangulum sub rectis d, i, l , aequale quarta parti quadrati ex minore g, l , descripti deficiens figura quadrata: sint autem d, i, l , ostensa longitudine commensurabiles, poterit maior d, l , plus, quàm minor g, l , quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, ut docet 18. propos. lib. huius.

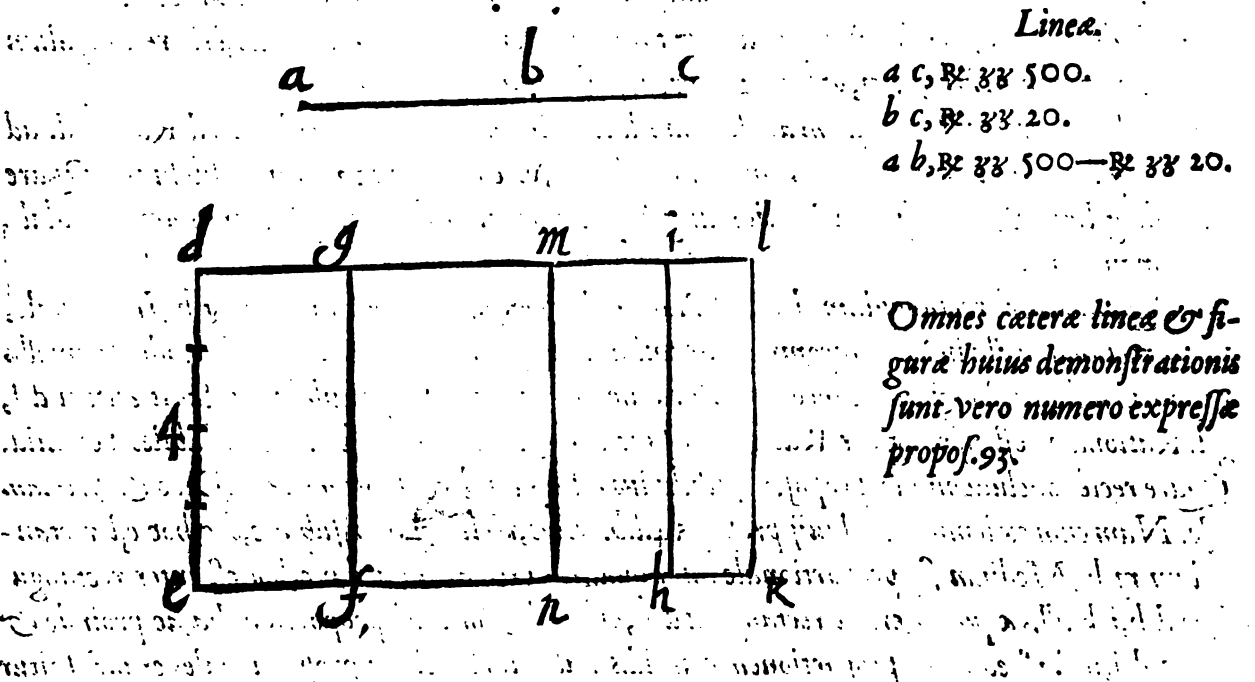
Igitur cum d, g , sit Apotoma ostensa, possitque tota d, l , plus, quàm g, l , quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, sitque d, l , Rationali d, e , exposita longitudine commensurabilis, erit ex definitione d, g , Apotome prima: Quadratum igitur ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod erat ostendendum.

Theor. 75. Propos. 99.

QUADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima a, b , illique congruat recta b, c , sintque a, c, b, c , Mediæ po-

rentia tantum inter se commensurabiles Rationales continentes. Exponatur Rationalis $d e$, ad quam applicetur rectangulum $d f$, aequale quadrato ex $a b$, faciens latitudinem $d g$. Dico rectam $d g$, esse Apotomen secundam: Iisdem enim constructis ut supra in antecedenti propos. ita ut rectangula $d h$, & $i k$, aequalia sint quadratis ex $a c$, $b c$, descriptis, & rectangulum $g k$, aequale sit ei, quod sub $a c$, $b c$, continetur, ac propterea rectangulum $m k$, aequale ei, quod sub $a c$, $b c$, continetur. Quoniam igitur $a c$, $b c$, Mediae sunt ex hypothesi, & tantum commensurabiles potentia, erunt earum quadrata, id est rectangula $d h$, $i k$, illis aequalia ex constructione Media, & commensurabilia, ac propterea & $d k$, virique illorum commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius, quare Medium erit $d k$, ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius.



Medium autem $d k$, ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed ei ad quam est applicatum longitudine incommensurabile, ut vult 23. propos. lib. huius, igitur latitudo $d k$ Rationalis erit, & Rationali $d e$, longitudine incommensurabilis.

Rursum cum rectangulum sub $a c$, $b c$, Rationale sit ex hypothesi, erit & eius duplum ei commensurabile, Rationale, nimirum rectangulum $g k$.

Sed Rationale $g k$, ad Rationalem $g f$, (quae quidem Rationali $d e$, est aequalis) applicatum, latitudinem facit $g l$, Rationalem, sed ipsi $g f$, Rationali longitudine commensurabili, ut vult 21. propos. lib. huius.

Quoniam vero $d k$, Medium est, & $g k$, Rationale, erunt rectangula $g k$, & $d k$, incommensurabilia, rectae quoque $d l$, $g l$, eandem habentes rationem cum illis longitudine incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huius. Sed Rationales sunt demonstratae rectae $d l$, $g l$, Rationales igitur sunt, & eorum potentia commensurabiles. Igitur recte concludimus ex propos. 24. lib. huius, reliquam $d g$, esse Apotomen, quam secundam esse dico.

Pari enim medio, quo vsi sumus propositione antecedenti demonstrabimus totum $d l$, plus posse, quam $g l$, quadrata rectae sibi longitudine commensurabilis. Igitur cum congruens $g l$, sit ostensa Rationali $d e$, longitudine commensurabilis, erit ex definitione $d g$, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediae Apotomae primae, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod erat ostendendum.

Theor.

Theor. 76. Propos. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT recta $a b$, Media Apotome secunda, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint Mediæ potentia tantum inter se commensurabiles, quæ Medium contineant. Exponatur Rationalis $d e$, & ad eam applicetur rectangulum $d f$, æquale quadrato ex $a b$, faciens latitudinem $d g$. Dico rectam $d g$, esse Apotomen tertiam: Iisdem enim constructis ut supra, demonstrabimus ut in antecedenti rectangulum $d k$, esse Medium, atque cum sit applicatum ad Rationalem $d e$, efficere latitudinem $d l$, Rationalem, & Rationali exposta $d e$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.

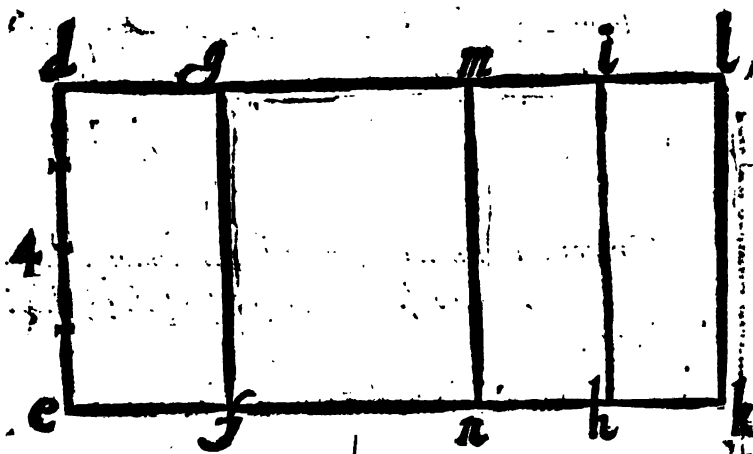
Quoniam verò rectangulum sub $a c, b c$, Medium est ex hypothesi, cuiusque duplum nimirum $g k$, erit etiam latitudo $g l$, Rationalis, sed Rationali $g f$, id est $d e$, longitudine incommensura-



$a c$, R. 38 600.

$b c$, R. 38 24.

$a b$, R. 38 600 — R. 38 24.



Omnes alia linea & figura etiam omnes huius demonstrationis, vero numero sunt expressæ propos. 94. lib. huius.

bilis. Cum autem $a c, b c$, sint potentia commensurabiles, & non longitudine, sitque ut $a c$, ad $b c$, ita per lemma 3. Clavij propos. 19. lib. huius quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c, b c$, contentum erit quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a c, b c$, comprehenso, incommensurabile ex 10. propos. lib. huius. Compositum autem ex rectarum quadratis $a c, b c$, quadrato ex $a c$, est commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius. Cum quadrata ex $a c, b c$, ex Mediæ potentia tantum inter se commensurabilibus descripta, sint commensurabilia; Rectangulo verò sub $a c, b c$, contento, commensurabile est, quod bis sub ipsis continetur. Quare ex scholio Clavij propos. 14. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, hoc est, rectangulum $d k$, illi æquale, incommensurabile erit rectangulo bis sub ipsis contento, hoc est, rectangulo $g k$, illi æquale. Cum igitur rectæ $d l, g l$, eandem rationem inter se habeant, quam rectangula $d k, g k$, erunt $d l, g l$, longitudine inter se incommensurabiles. Sunt autem Rationales demonstrata rectæ $d l, g l$, Rationales igitur sunt, sed tantum potentia inter se commensurabiles. Quare recte concludemus ex propos. 74. lib. huius, reliquam $d g$, esse Apotomen, quam dico esse tertiam. Pari enim medio, quo vsi sumus propos. 98. demonstrabimus rectam $d l$, plus posse, quam $g l$, illi congruens quadrato rectæ sibi

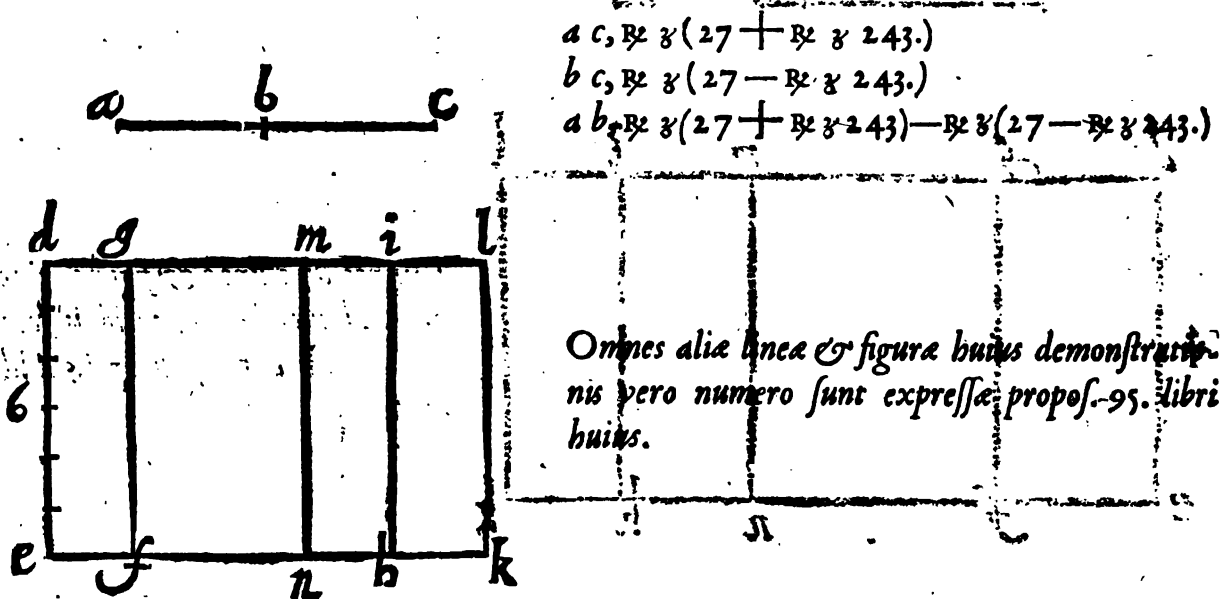
Nn

longitudine commensurabilis. Quare cum neutra ipsarum Rationali exposita $d e$, longitudine sit commensurabilis (quod demonstravimus) erit $d g$, ex definitione Apotome tertia. Quadratum igitur Media Apotoma secunda ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 77. Propos. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT recta $a b$, Minor, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint incommensurabiles potentia, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Exponatur Rationalis $d e$, ad quam applicetur rectangulum $d f$, quadrato ex $a b$, aequale, faciens latitudinem $d g$. Dico rectam $d g$, esse Apotomen quartam, hisdem enim constructis ut supra demonstrabimus rectangulum $d k$, (quod aequale est composito ex rectarum quadratis $a c, b c$), esse Rationale. Cum autem Rationale $d k$, ad Rationalem $d e$, sit applicatum efficiet latitudinem $d l$, Rationalem, & Rationali $d e$, à principio exposita longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huius.



Rursus cum rectangulum sub $a c, b c$, ac proinde & eius duplum, Medium sit ex hypothesi, faciet Medium, illud ad Rationalem $g f$, quae Rationali $d e$, est aequalis, latitudinem $g l$, Rationalem, sed Rationali $d e$, exposita incommensurabilem longitudine ex 23. propos. libri huius.

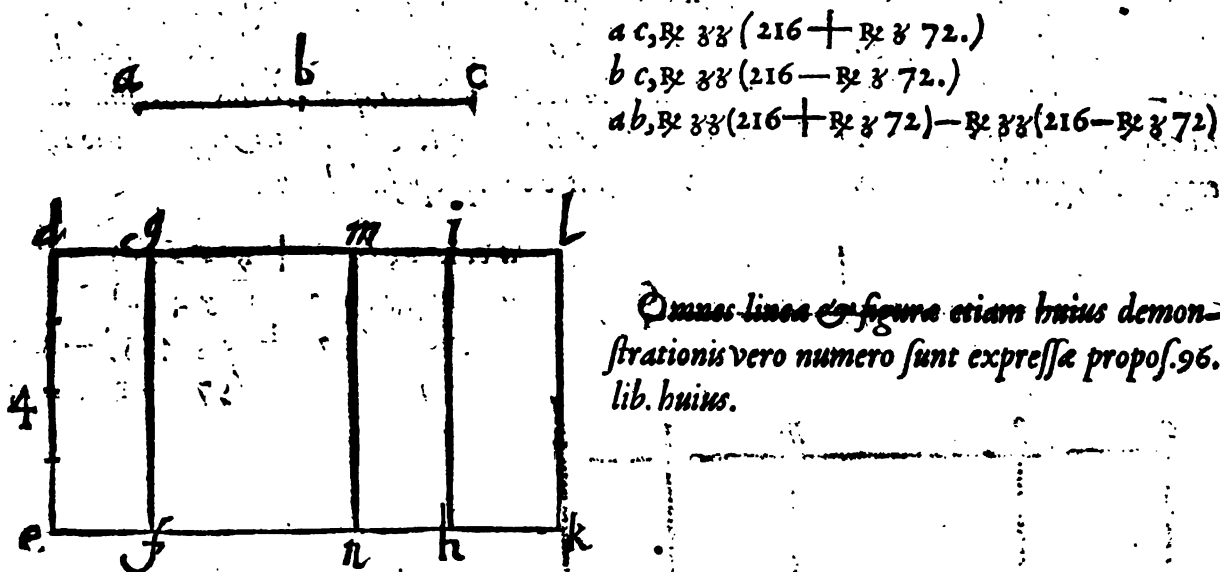
Deinde quoniam rectangulum $d k$, Rationale est ostensum, $g k$, verò Irrationale, sine Medium, erunt rectangula $d k, g k$, inter se incommensurabilia, rectae quoque $d l, g l$, eandem habentes rationem cum illis, longitudine erunt incommensurabiles. Sunt autem Rationales ostense rectae $d l, g l$, Rationales igitur sunt, sed tantum potentia commensurabiles. Quare recte concludemus ex 74. propos. lib. huius, reliquam $d g$, esse Apotomen, quam quartam esse dico. Nam cum $a c, b c$, sint incommensurabiles potentia, erunt earum quadrata inter se incommensurabilia, atque adeo & rectangula $d h, i k$, illis aequalia ex constructione incommensurabilia erunt, ac proinde rectae $d i, i l$, eandem cum illis rationem habentes longitudine, erunt incommensurabiles, ut

vult 10. propos. lib. huius. Cum autem rectangulum sub d i, i l, aequale sit quadrato ex m l, id est quarta parti quadrati ex g l, descripti, ut fuit à nobis ostensum propos. 98. lib. huius, poterit d l, plus, quam g l, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, ut vult 19. propos. lib. huius. Quare cum tota d l, plus possit, quam illi congruens g l, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, sitque d l, Rationali d e, ostensa commensurabilis longitudine erit ex definitione reliqua d g, Apotome quarta. Quadratum ergo Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 78. Propos. 102.

QUADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta a b, ea, quæ cum Rationali Medium totum facit, & illi congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint rectæ potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.



Quoniam linea & figura etiam huius demonstrationis vero numero sunt expressæ propos. 96. lib. huius.

Exponatur Rationalis d e, ad quam applicetur rectangulum d f, quadrato ex a b, aequale faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse Apotomen quintam. Iisdem enim constructis, quæ supra. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis a c, b c, atque adeò & rectangulum d k, illi aequale, Medium sit: sitque Medium illud d k, applicatum ad Rationalem d e, efficiet latitudinem d l, Rationalem, & Rationali d a, exposita longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.

Rursum cum rectangulum sub a c, b c, Rationale sit, ac proinde & eius duplum hoc est g k, erit latitudo g l, Rationalis, & Rationali g f, quæ equalis est Rationali d e, exposita longitudine commensurabilis ex 21. propos. lib. huius.

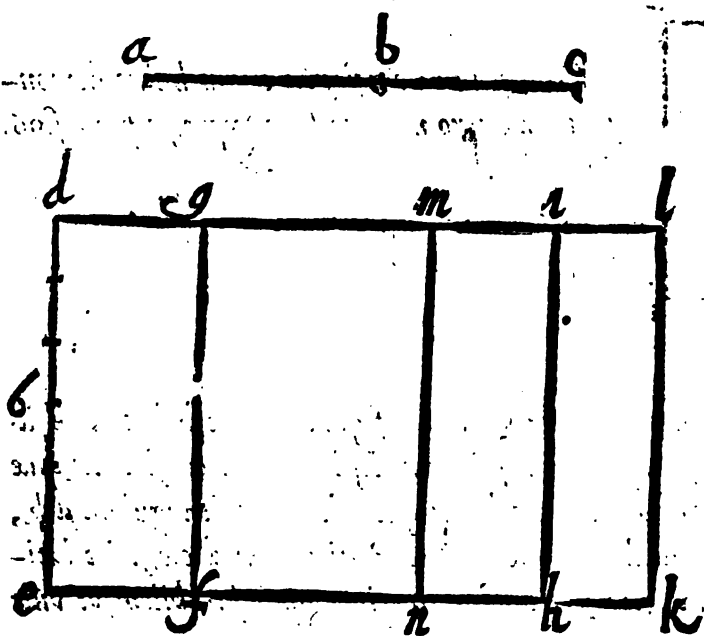
Quoniam verò rectangulum d k, Medium est ostensum, rectangulum verò g k, Rationale, erunt rectangula d k, g k, inter se incommensurabilia, Ac propterea rectæ d l, g l, eandem cum illis rationem habentes longitudine incommensurabiles erunt, ut constat ex 10. propos. lib. huius. Rationales tamen sunt ostensa d l, g l, Rationales igitur sunt, & tantum potentia commensurabiles. Quare non immerito concluditur cum propos. 74. lib. huius, reliquam d g, esse Apotomen,

quam quintam esse dico. Pari enim medio, quo vti sumus propof. antecedenti demonstrabitur rectam $d l$, plus posse, quam illi congruens $g l$, quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine. Quocirca cum $g l$, Rationali $d e$, exposita longitudine sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua $d g$, Apotome quinta. Quadratum igitur eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 79. Propof. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta $a b$, ea, quæ cum Medio Medium totum facit, illique congruat recta $b c$, ita ut $a c$, $b c$, sint rectæ potentia inter se incommensurabiles, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis, & exposita Rationali $d e$, applicetur ad eam rectangulum quadrato ex $a b$, æquale, latitudinem efficiens $d g$. Dico rectam $d g$, esse Apotomen sextam. Iisdem enim constructis, quæ supra demonstrabimus tam rectangulum $d k$, quam rectangulum $g k$, esse Medium. Cum $d k$, composito ex rectarum quadratis $a c$, $b c$, sit æquale, & $g k$, etiam æquale ponatur rectangulo bis sub ipsis contento. Quare cum rectangula illa, quæ Media sunt, sint ad Rationales $d e$, & $g f$, applicata, facient latitudines $d l$, & $g l$, Rationales, & ipsis Rationalibus expositis longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propof. lib. huius.



$$\begin{aligned} a c, & 88 (972 + 88 \times 405) \\ b c, & 88 (972 - 88 \times 405) \\ a b, & 88 (972 + 88 \times 405) - 88 \\ & (972 - 88 \times 405) \end{aligned}$$

Omnes lineæ & figura huius demonstrationis vero numero sunt expressæ propof. 97. lib. huius.

Quoniam verò rectangulum sub $a c$, $b c$, incommensurabile est composito ex ipsarum quadratis, sineque rectangulum sub $a c$, $b c$, contentum, & rectangulum bis sub illis contentum, commensurabilia (nimirum $g k$, illi æquale,) erit rectangulum $g k$, rectangulo $d k$, incommensurabile, rectæ etiam $d l$, $g l$, eandem cum illis rationem habentes longitudine incommensurabiles, Sed iam Rationales sunt ostensa rectæ $d l$, $g l$. Igitur Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles. Quare rectè concludemus cum propof. 74. lib. huius reliquam $d g$, esse Apotomen. Dico & sextam esse. Pari enim medio, quo vti sumus propof. 101. demonstrabimus $d l$, plus posse, quam illi congruens $g l$, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur

neutra

neutra ipsarum Rationali exposita $d e$, sit longitudine commensurabilis, erit ex definitione $d g$, Apotome sexta. Quadratum igitur eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 80. Propos. 104.

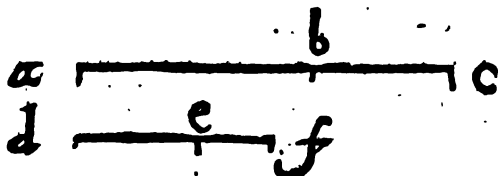
Recta linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT recta $a b$, Apotome, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c$, $b c$, sint Rationales, & tantum potentia inter se commensurabiles. Sit autem recta $a b$, longitudine commensurabilis recta $d e$, Dico & $d e$, esse Apotomen, & ordine eandem ipsi $a b$, fiat ut $a b$, ad $d e$, ita $b c$, ad $e f$, id est quarta proportionalis inueniatur, ut vult propof. 12. lib. 6. erit igitur tota $a c$, ad totam $d f$, ut $a b$, ad $d e$, vel ut $b c$, ad $e f$, ut constat ex 12. propof. lib. 5. Quare cum $a b$, & $d e$, sint ex hypothesi longitudine commensurabiles, erunt quoque tota $a c$, $d f$, & $b c$, $e f$, longitudine commensurabiles.

$d f$, R. 8 15.

$e f$, R. 8 3.

$d e$, R. 8 15 — R. 8 3.



$a c$, R. 8 60.

$b c$, R. 8 12.

$a b$, R. 8 60 — R. 8 12.

Quoniam verò $a c$, $b c$, sunt Rationales, & tantum potentia commensurabiles, erunt $d f$, & $e f$, etiam Rationales commensurabiles potentia tantum, ut colligitur ex scholio Clauj 10. propof. lib. huius. Igitur cum Rationales sint demonstrata, recte concludemus ex 74. propof. lib. huius reliquam $d e$, esse Apotomen: Dico & eam esse ordine eandem ipsi $a b$.

Aut enim $a c$, plus poterit, quam $b c$, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si verò plus possit $a c$, quam $b c$, quadrato recta sibi commensurabilis, poterit & $d f$, plus, quam $e f$, quadrato etiam recta sibi longitudine commensurabilis. Quod si $a c$, sit Rationali exposita commensurabilis longitudine, erit & $d f$, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ut vult 12. propof. lib. huius, ac propterea tam $a b$, quam $d e$, erit Apotome prima: Si verò $b c$, eidem Rationali sit longitudine commensurabilis, erit & $e f$, eidem Rationali commensurabilis longitudine. Quare ex definitione erunt $a b$, $d e$, Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum Rationali exposita longitudine sit commensurabilis, neutra quoque ipsarum $d e$, $e f$, eidem Rationali longitudine commensurabitur. Quare ex definitione erit $a b$, & $d e$, Apotome tertia: Sed si $a c$, plus possit, quam $b c$, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, poterit & $d f$, plus, quam $e f$, quadrato etiam recta sibi incommensurabilis longitudine, ut vult 15. propof. lib. huius. Quare pari ratione, qua vti sumus superius, ostendemus rectam $d e$, esse Apotomen quartam, vel quintam, vel sextam. Igitur recta linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM CLAVII.

Item hic dicemus de Apotomis, quod ad propof. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scriptimus. Nimirum si recta $d e$, commensurabilis sit ipsi $a b$, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis, longitudine commensurabilis: utamur voce: potentia tantum commensurabilis) & $d e$, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi $a b$. Non enim sequitur, si tota $a c$, longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & $d f$, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non utraque nempe Rationalis exposita, & $d f$, eidem $a c$, longitudine commensurabilis est, sed Ra-

rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò d f, potentia tantum ex hypothesi. Imo verò si a b, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, ut d e, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine. Sit enim a b, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, etque congruens b c, & sit d e, ipsi a b, potentia tantum commensurabilis, quam quidem ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem e f, & partes a b, b c, ad partes d e, e f, eandem proportionem habere cum totis a c, d f, Dico nulla ratione d e, Apotomen esse ordine eadem ipsi a b. Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam a c tota, quam tota d f, ex definitione Apotoma prima, Rationali exposta commensurabilis longitudine: atque aded & inter se longitudine commensurabiles erunt a c, & d f. Quare cum sit ut a c, ad d f, ita a b, ad d e, erunt quoque a b, & d e, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim d e, ipsi a b, potentia solum commensurabilis. Non ergo utraque a b, d e, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Effet enim utraque congruens b c, e f, ex definitione longitudine commensurabilis Rationali exposta, atque aded & ipsa inter se. Quocirca & a b, d e, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

Semper tamen verum est, si a b, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam d e, qua ipsi a b, potentia solum est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit a c, plus, quam b c, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, poterit quoque d f, plus, quam e f, quadrato recta longitudine sibi commensurabilis. Quare ex definitione erit d e, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si a b, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut a c, plus possit, quam b c, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, erit quoque d e, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta quamvis ordine non eadem ipsi a b, quia rursus, cum sit ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, poterit quoque d f, plus, quam e f, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex definitione erit a b, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta. In sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit d e, eadem ordine ipsi a b, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

Theor. 81. Propos. 105.

Recta linea Mediae Apotomæ commensurabilis, & ipsa Mediae Apotome est, atque ordine eadem.

SIT recta a b, Media Apotoma quæcunque, illique congruat recta b c, ita ut a c, b c, Mediae sint potentia tantum commensurabiles, facientes aut Rationale, aut Medium.

			Linea.
d f, R ² 38 31 $\frac{1}{4}$	a ————— b	c	a c, R ² 38 500.
e f, R ² 38 1 $\frac{1}{4}$	d ————— e	f	b c, R ² 38 20.
d e, R ² 38 31 $\frac{1}{4}$ — R ² 38 1 $\frac{1}{4}$			a b, R ² 38 500 — R ² 38 20.

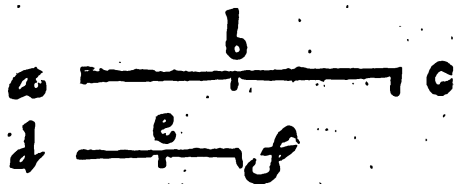
Sit ipsi a b, recta d e, commensurabilis siue longitudine & potentia simul, siue potentia tantum. Dico & d e, Mediae Apotomen esse, & ordine eadem ipsi a b, lisdem enim constructis ut supra antecedenti propositione, erunt igitur a b, & d e, b c, & e f, eodem modo commensurabiles. Quoniam verò a c, b c, Mediae sunt, erunt & illis commensurabiles d f, e f, Mediae. Rursus cum sit ut a c, ad d f, ita b c, ad e f, & permutando ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, Sunt autem a c, b c, solum potentia commensurabiles, erunt etiam d f, e f, tantum potentia commensurabiles, ex scholio Clavi propof. 10. lib. huius. Igitur cum d f, & e f, sint Mediae ostensa, recte inferitur ex 74. propof. lib. huius, reliquam d e, esse Media Apotomen, quam dico ordine esse eandem ipsi a b, Nam cum sit ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, & ut a c, ad b c, ita est quadratum ex a c, ad rectangulum sub a c, b c, ex lemmate 3. Clavi propof. 19. lib. huius. Et ut d f, ad e f, ita quadratum ex d f, ad rectangulum sub ipsis contentum, erit quoque ut quadratum ex a c, ad rectangulum sub a c, b c, ita quadratum ex d f, ad rectangulum sub d f, e f, & permutando ut quadratum ex a c, ad quadratum ex d f, ita rectangulum sub a c, b c, ad rectangulum sub d f, e f, contentum. Quare cum quadratum ex a c, quadrato ex d f, commensurabile sit ostensum, cum recta a c, d f, longitudine sint commensurabiles demonstrata, erit rectangulum sub a c, b c, rectangulo sub d f, e f, commensurabile, ex 10. propof. lib. huius. Quare si rectangulum sub a c,

b c, est Rationale, erit & rectangulum sub d f, e f, Rationale, Ac proinde recta d e, Media Apotome prima erit, ex 75. propos. lib. huius. Si verò rectangulum sub a c, b c, Medium sit, erit & rectangulum sub d f, e f, contentum, Medium, ac proinde ex 76. propos. recta d e, Media Apotome secunda erit. Recta igitur linea Media Apotoma commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 82. Propos. 106.

Recta linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT recta a b, Minor, eique congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint recta potentia incommensurabiles, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.



Sit ipsi a b, commensurabilis d e, vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum. Dico rectam d e, Minorem esse. Fiant reliqua ut supra, ita ut rursus a b, b c, d e, & e f, eandem habeant rationem, quam a c, ad d f, erunt igitur ut in propos. antecedenti d f, & e f, ipsae a c, b c, commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum.

Quoniam verò est ut a c, ad d f, ita b c, ad e f, & permutando ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, erit quoque ut quadratum ex a c, ad quadratum ex b c, ita quadratum ex d f, ad quadratum ex e f, & componendo ut compositum ex rectarum quadratis a c, b c, ad quadratum ex b c, sic compositum ex rectarum quadratis d f, e f, ad quadratum ex e f, & permutando, ut compositum ex rectarum quadratis a c, b c, ad compositum ex rectarum quadratis d f, e f, ita quadratum ex b c, ad quadratum ex e f. Quadratum autem ex b c, quadrato ex e f, commensurabile est ostensum. Igitur compositum ex rectarum quadratis a c, b c, composito ex rectarum quadratis d f, e f, commensurabile erit. Sed compositum ex rectarum quadratis a c, b c, Rationale ponitur: Igitur & compositum ex quadratis rectarum d f, e f, ei commensurabile, Rationale erit.

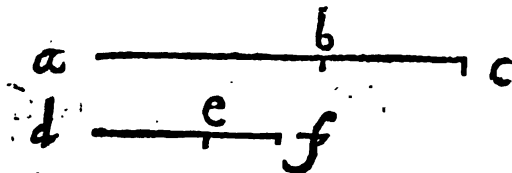
Rursus cum rectangulum sub a c, b c, Medium sit, erit & illi commensurabile rectangulum sub d f, e f, Medium. Ostendimus enim propositione antecedenti rectangula illa inter se esse commensurabilia.

Quoniam verò est ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, sunt autem a c, b c, incommensurabiles potentia, erunt & d f, e f, potentia incommensurabiles. Quare cum d f, e f, sint potentia incommensurabiles, quae faciunt compositum ex rectarum quadratis, Rationale, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, recte concludemus ex 77. propos. lib. huius rectam d e, esse Minorem, Minori igitur commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 83. Propos. 107.

Recta linea commensurabilis ei, quae cum Rationali Medium totum efficit, & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta $a b$, ea, quae cum Rationali Medium totum efficit, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint rectae potentia incommensurabiles, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.



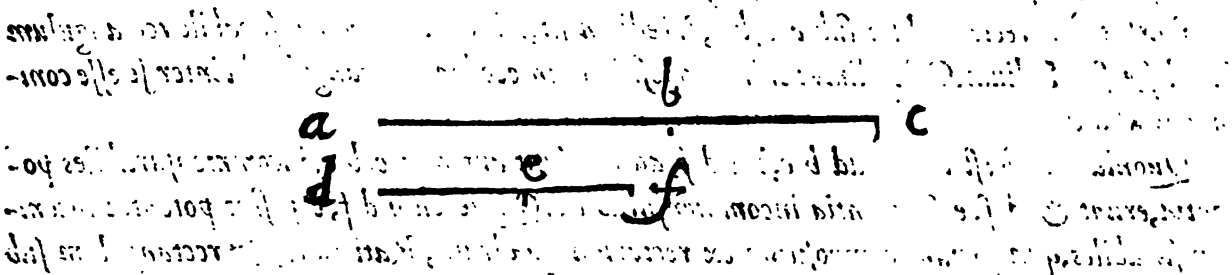
Sit ipsi $a b$, commensurabilis vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum recta $d e$. Dico rectam $d e$, eam esse, quae cum Rationali Medium totum facit. Fiant reliqua ut in antecedentibus. Igitur demonstrabimus ut in propof. antecedenti compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, composito ex rectarum quadratis $d f, e f$, esse commensurabile. Cum autem compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, ex hypothesi Medium sit, erit & illi commensurabile compositum ex quadratis rectarum $d f, e f$, Medium.

Denique demonstrabimus ut in propof. 105. rectangulum sub $a c, b c$, rectangulo sub $d f, e f$, esse commensurabile. Quare cum rectangulum sub $a c, b c$, Rationale ponatur, erit & rectangulum sub $d f, e f$, Rationale: ostensa sunt autem ut in propof. antecedenti rectae $d e, e f$, incommensurabiles, potentia. Quare cum $d e, e f$, sint potentia inter se incommensurabiles, faciuntque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale, recta concludemus ex 78. propof. lib. huius, reliquam $d e$, eam esse, quae cum Rationali Medium totum facit. Recta igitur linea commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 84. Propof. 108.

Recta linea commensurabilis ei, quae cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta $a b$, ea, quae cum Medio Medium totum facit, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint incommensurabiles potentia, quae faciant compositum ex rectarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabileque composito ex rectarum quadratis.



Sit recta $d e$, commensurabilis ipsi $a b$, aut longitudine & potentia simul, aut potentia tantum. Dico rectam $d e$, esse etiam eam, quae cum Medio Medium totum facit. Fiant reliqua ut prius. Igitur demonstrabimus ut in propof. 106. compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, composito ex quadratis rectarum $d f, e f$, esse commensurabile. Medium autem ponitur compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$. Igitur ex corollario Clauj propof. 24. lib. huius erit rectangulum sub $d f, e f$, Medium.

Rursus

Rursus ut in propof. 106. demonſtrabimus rectangulum ſub $a c, b c$, rectangulo ſub $d f, e f$, eſſe commenſurabile: eſt autem rectangulum ſub $a c, b c$, ex hypotheſi Medium. Igitur ei commenſurabile, quod ſub $d f, e f$, continetur, Medium erit, ex eodem corollario Clauſi propof. 24. lib. huius. Poſtremo cum composito ex rectarum quadratis $a c, b c$, compositum ex quadratis rectarum $d f, e f$, oſtenſum ſit commenſurabile, rectangulo verò ſub $a c, b c$, commenſuratur quoque rectangulum ſub $d f, e f$. Sunt autem ex hypotheſi compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, & rectangulum ſub ipsis contentum, incommenſurabilia, erunt quoque ex ſcholio Clauſi propof. 14. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis $d f, e f$, & rectangulum ſub $d f, e f$, inter ſe incommenſurabilia.

Quare cum $d e, e f$, ſint incommenſurabiles potentia, faciãtque compositum ex ipſarum quadratis, Medium, rectangulum etiam ſub ipsis contentum, Medium, & incommenſurabile composito ex ipſarum quadratis, rectè concludemus cum propof. 79. lib. huius reliquam $d e$, eam eſſe, qua cum Medio Medium totum facit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, qua cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.

Theor. 85. Propof. 109.

MEDIO à Rationali detracto, Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus ſit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR ex Rationali $a d$, Medium $c d$. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum $a b$, eſſe vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur Rationalis $e f$, & ad eam applicetur rectangulum $e g$, rectangulo $a b$, æquale, & ad $g h$, quæ Rationali $e f$, eſt æqualis aliud rectangulum applicetur $h i$, rectangulo $c d$, æquale. Quoniam igitur rectangulum $e i$, rectangulo Rationali $a d$, eſt æquale, erit $e i$, Rationale, ac propterea & recta $e k$, Rationalis, ut conſtat ex 21. propof. lib. huius.

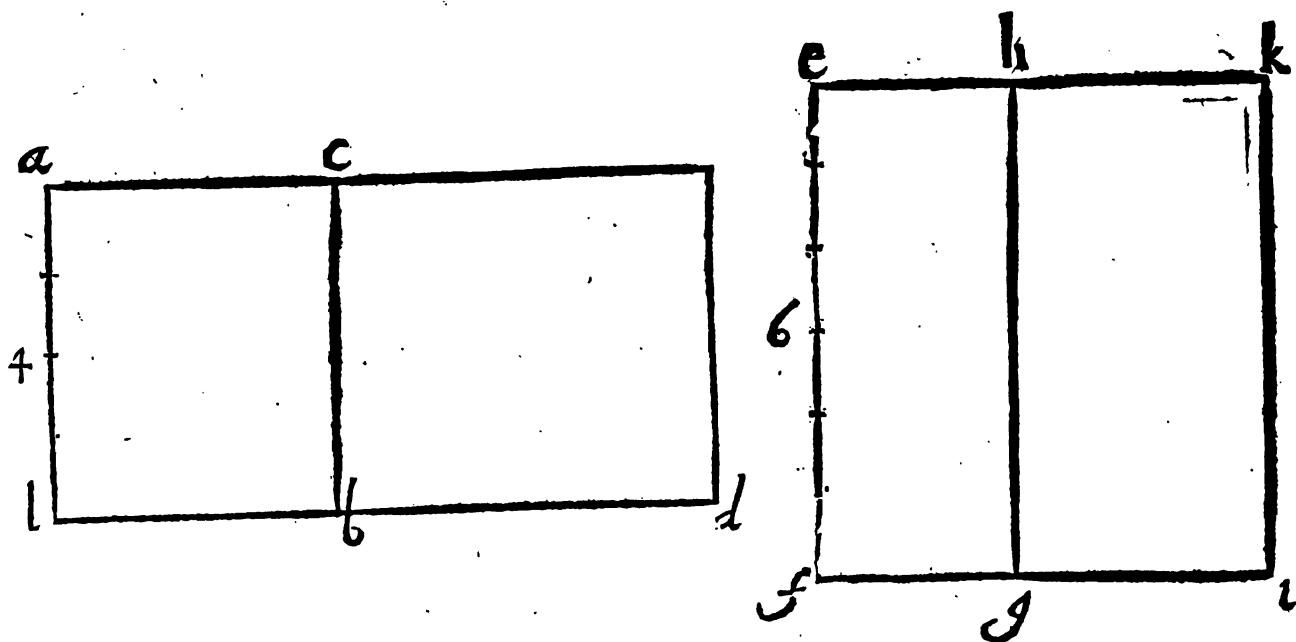
Rurſus cum rectangulum $h i$, Medio $c d$, æquale ex conſtructione Medium ſit, ſitque applicatum illud Medium ad Rationalem $h g$, faciet latitudinem $h k$, Rationalem, ſed Rationali $h g$, ad quam applicatum eſt incommenſurabilem longitudine, ut vult 23. propof. lib. huius. Quare cum $e k$, Rationali $e f$, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa, recta verò $h k$, eidem Rationali minime longitudine commenſurabilis ſit demonſtrata, erunt rectæ $e k, h k$, longitudine incommenſurabiles, Rationales tamen ſunt oſtenſæ. Igitur Rationales erunt rectæ $e k, h k$, & tantum commenſurabiles potentia, rectè igitur concludemus cum 74. propof. lib. huius, reliquam $e h$, Apotomen eſſe, etque erit congruens $h k$. Iam verò aut $e k$, plus poteſt, quàm $h k$, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis.

Si verò $e k$, plus poſſit, quàm $h k$, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum tota $e k$, Rationali $e f$, expoſita longitudine ſit commenſurabilis oſtenſa, erit recta $e h$, ex definitione Apotome prima. Quare recta potens ſpatium $e g$, contentum, ſub Rationali $e f$, & Apotoma prima $e h$, hoc eſt, ſpatium $a b$, ſibi æquale, Apotome eſt, ut vult 92. propof. lib. huius.

Sed ſi $e k$, plus poſſit, quàm $h k$, quadrato rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine, cum tota $e k$, Rationali $e f$, expoſita longitudine commenſurabilis ſit demonſtrata, erit ex definitione reliqua $e h$, Apotome quarta. Igitur recta, quæ poterit ſpatium $e g$, contentum ſub Rationali

Pp

$e f$, & Apotoma quarta $e h$, hoc est, spatium $a b$, illi aequale Minor est, ut constat ex 95. propos. lib. huius. Medio igitur à Rationali detracto, &c. Quod erat ostendendum.



Linea.	Rectangula.	Linea secunda figura.	Rectangula.
$a l, 4.$	$a d, 32.$	$e k, 5 \frac{1}{5}.$	$e i, 32.$
$l d, 8.$	$c d, 8 \frac{2}{3} \times 320.$	$h k, 8 \frac{2}{3} \times 8 \frac{2}{3}.$	$h i, 8 \frac{2}{3} \times 320.$
$b d, 8 \frac{2}{3} \times 20.$	$a b, 32 - 8 \frac{2}{3} \times 320.$	$e h, 5 \frac{1}{5} - 8 \frac{2}{3} \times 8 \frac{2}{3}.$	$e g, 32 - 8 \frac{2}{3} \times 320.$
$l b, 8 - 8 \frac{2}{3} \times 20.$			
Linea potens spatium $e g$, erit Minor, nimirum $8 \frac{2}{3} (16 + 8 \frac{2}{3} \times 176) + 8 \frac{2}{3} (16 - 8 \frac{2}{3} \times 176).$			

Theor. 86. Propos. 110.

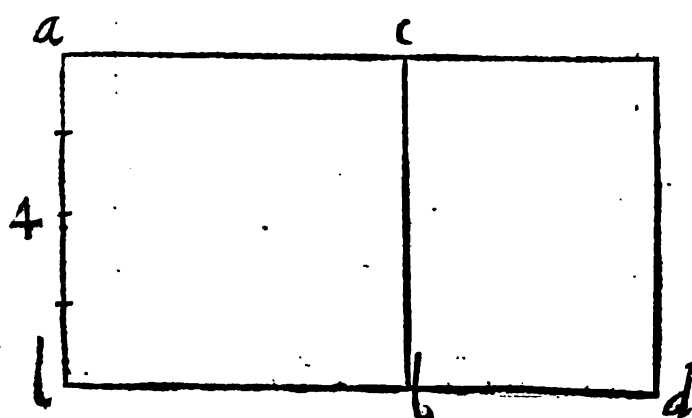
RATIONALI à Medio detracto, alia duæ Irrationales fiunt, vel Media Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATUR à Medio $a d$, rectangulum Rationale $c d$, Dico rectam, quæ poterit reliquum spatium $a b$, esse vel Media Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum facit. Fias constructio ut supra. Igitur cum rectangulum $e i$, Medio $a d$, aequale sit, erit rectangulum $e i$, Medium. Quod cum sit applicatum ad Rationalem $e f$, faciet latitudinem $e k$, Rationalem, & Rationali $e f$, exposita longitudine incommensurabilem ut videtur 23. propos. libri huius.

Quoniam vero rectangulum $h i$, Rationali $c d$, est aequale erit $h i$, Rationales. Ac proinde ex 21. propos. lib. huius recta $h k$, Rationalis, & Rationali $h g$, quæ æqualis est ipsi $e f$, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum $e k, h k$, illa quidem Rationali exposita sit longitudine incommensurabilis ostensa; Hac vero eidem Rationali longitudine commensurabilis sit, erant inter se incommensurabiles longitudine rectæ $e k, h k$, Rationales tamen sunt demonstrata, Rationales igitur sunt $e k, h k$, & tantum potentia commensurabiles.

Iam vero aut $e k$, plus poterit, quam $h k$, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Igitur si recta $e k$, plus possit, quam $h k$, quadrato rectæ sibi longitu-

dine commensurabilis, Cùm h k , Rationali exposita sit longitudine commensurabilis ostensa, erit ex definitione reliqua e h , Apotome secunda. Quare recta potens spatium a b , contentum sub Rationali e f , & Apotoma secunda e h , Media Apotome est prima, ut constat ex 93. propos. lib. huius.



Linea prima figura.

l d , $\frac{1}{2} \times 50$.

b d , 3.

l b , $\frac{1}{2} \times 50 - 3$.

Rectangula.

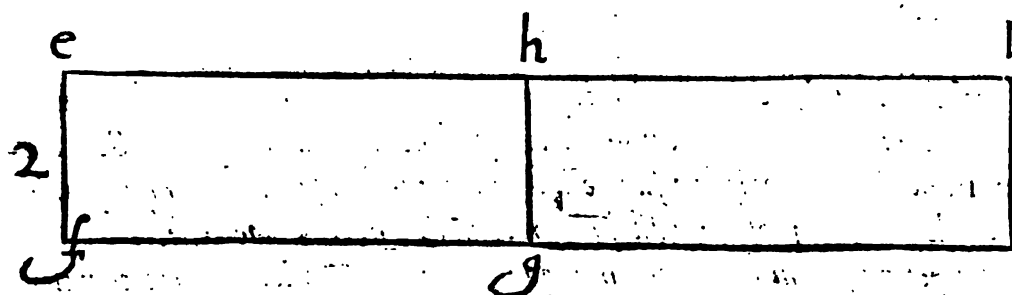
a d , $\frac{1}{2} \times 800$.

c d , 12.

a b , $\frac{1}{2} \times 800 - 12$.

Linea potens spatium e i , erit $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 200 - \frac{1}{2} \times 164) - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 200 - \frac{1}{2} \times 164)$ que cum Rationali Medium totum efficiens appellatur.

Linea secunda figura.



e k , $\frac{1}{2} \times 100$.

h k , 6.

e g , $\frac{1}{2} \times 200 - 6$.

Rectangula.

e i , $\frac{1}{2} \times 800$.

h i , 12.

e g , $\frac{1}{2} \times 800 - 12$.

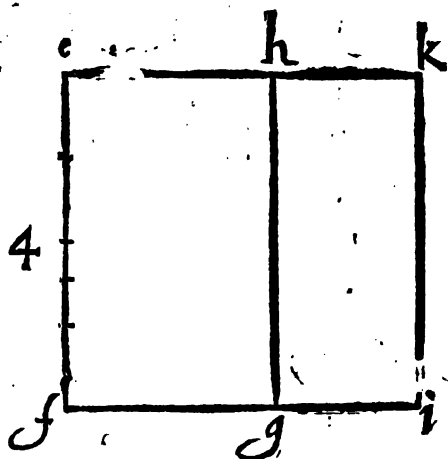
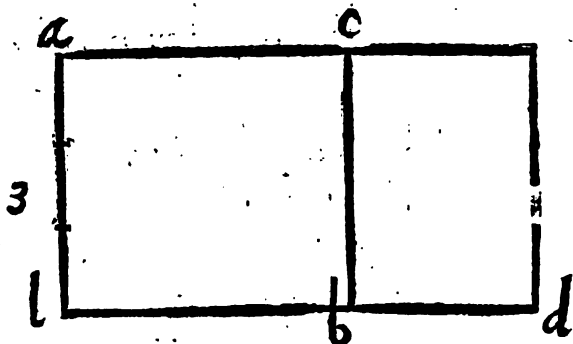
Si verò e k , plus possit, quàm h k , quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, Cùm h k , Rationali exposita longitudine sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua e h , Apotome quinta. Quare recta, que poterit spatium contentum sub Rationali e f , & Apotoma quinta e h , ea est, que cum Rationali Medium totum facit, ut constat ex 96. propos. lib. huius.

Rationali igitur à Medio detracto, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 87. Propos. III.

MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediz Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

AVFERATUR à Medio a d , Medium c d , quod incommensurabile sit toti a d , Dico rectam, que poterit reliquum spatium a b , esse vel Mediz Apotomen secundam, vel eam, que cum Medio Medium totum facit, fiat constructio ut supra. Igitur cùm rectangula e i , & h i , Media a d , c d , equalia sint, sinque applicata ad Rationales e f , h g , efficiant latitudines e k , h k , Rationales, & ipsis Rationalibus longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius.



Linea prima figura.

$l d, Bz \ 8 \ 31.$

$b d, Bz \ 8 \ 4 \frac{4}{9}$

$l b, Bz \ 8 \ 31 - Bz \ 8 \ 4 \frac{4}{9}$

Rectangula.

$a d, Bz \ 8 \ 279.$

$c d, Bz \ 8 \ 40.$

$a b, Bz \ 8 \ 279 - Bz \ 8 \ 40.$

Linea secunda figura.

$e k, Bz \ 8 \ 17 \frac{7}{16}$

$h k, Bz \ 8 \ 2 \frac{1}{2}$

$e h, Bz \ 8 \ 17 \frac{7}{16} - Bz \ 8 \ 2 \frac{1}{2}$

Rectangula figura

secundae eadem

sunt, quae prima

ex constructione.

Linea potens spatium $e i$, erit $Bz \ 8 \ (Bz \ 8 \ 69 \frac{1}{4} + Bz \ 8 \ 59 \frac{1}{4}) - Bz \ 8 \ (Bz \ 8 \ 69 \frac{1}{4} - Bz \ 8 \ 59 \frac{1}{4})$ quae cum Medio Medium totum efficiens appellatur.

Quoniam verò rectangula $a d, c d$, id est $e i, h i$, ponuntur inter se incommensurabilia, erunt rectae $e k, h k$, eandem cum illis habentes Rationem longitudine incommensurabiles. Sed Rationales sunt demonstrata. Rationales igitur sunt $e k, h k$, & tantum potentia commensurabiles. Quare recte concludemus cum propos. 74. lib. huius reliquam $e h$, Apotomen esse.

Iam verò $e k$, plus poterit, quam congruens $h k$, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis; sed si $e k$, plus possit, quam $h k$, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, Cum neutra ipsarum Rationali exposita longitudine sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua $e h$, Apotome tertia: Quare recta potens spatium contentum sub Rationali $e f$, & Apotome tertia $e h$, hoc est spatium $a b$, Media Apotome est secunda, ex 94. propos. libri huius.

Si verò $e k$, plus possit, quam $h k$, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum Rationali exposita sit longitudine commensurabilis, erit ex definitione reliqua $e h$, Apotome sexta.

Quare recta, quae poterit spatium contentum sub Rationali $e f$, & Apotoma sexta $e h$, hoc est spatium $a b$, illi aequale, ea est, quae cum Medio Medium totum facit, ut concluditur propos. 97. lib. huius. Medio igitur a Medio detracto, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 88. Propos. 112.

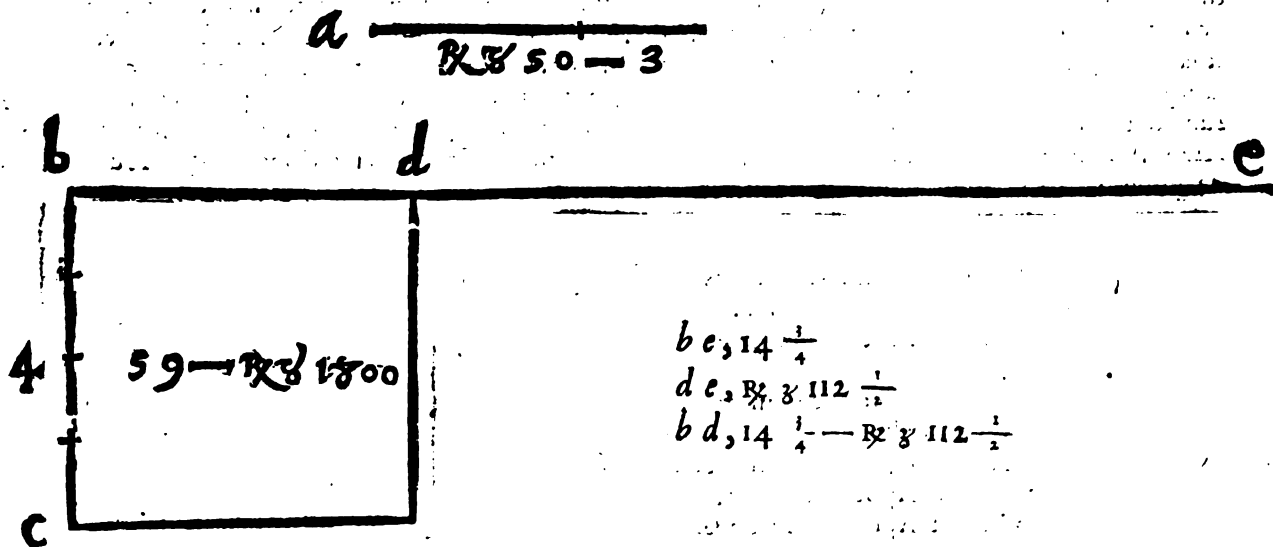
APOTOME non est eadem, quae ex binis nominibus.

SIT recta a , Apotome quaecunque. Dico: non esse eandem, quae ex binis nominibus.

Sit a , si fieri potest una ex binis nominibus, & exposita Rationali b , & applicetur ad eam rectangulum $c d$, aequale quadrato ex Apotome a , descripto. Quoniam igitur recta a est Apotoma ex hypothesis, erit latitudo $b d$, Apotome prima, ut constat ex 98. propos. lib. huius.

Con-

Congruat igitur ipsi $b d$, recta $d e$, erunt igitur ex definitione Apotomæ primæ $b e$, $d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & $b e$, plus poterit, quàm $d e$, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & denique $b e$, Rationali exposita $b c$, longitudine commensurabitur.



Rursus cum a , ponitur etiam esse ex binis nominibus, erit eadem latitudo $b d$, ex binis nominibus prima, ut vult propof. 61. lib. huius. Sit ipsius $b d$, maius nomen $b f$, erunt igitur ex definitione eius, quæ est ex binis nominibus prima $b f$, $f d$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen $b f$, plus poterit, quàm minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & denique maius nomen $b f$, Rationali $b c$, exposita erit longitudine commensurabile. Quare cum $b e$, & $b f$, Rationali $b c$, sint longitudine commensurabiles, erunt etiam $b e$, $b f$, inter se commensurabiles longitudine, ut vult propof. 12. lib. huius. Cum autem tota $b e$, longitudine sit commensurabilis parti $b f$, erit & $b e$, reliquæ parti $f e$, longitudine commensurabilis, ex corollario Clavi propof. 16. lib. huius. Quare cum $b e$, sit Rationalis, erit & $f e$, Rationalis. Quoniam verò duarum rectarum $b e$, $f e$, longitudine inter se commensurabilium, illa longitudine est incommensurabilis ipsi $d e$, (sunt enim $b e$, $d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles) erit quoque altera $f e$, eidem $d e$, longitudine incommensurabilis: Sed Rationales sunt ostensa $f e$, $d e$, Igitur Rationales sunt, sed tantum potentia commensurabiles. Ac proinde cum 74. propof. lib. huius rectè concludemus, reliquam $f d$, Apotomen esse, & Irrationalem, Rationalis tamen est ostensa $f d$, Quod absurdum. Non igitur a , Apotome, & c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM EX CLAVIO.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse eandem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum^a, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum^b, latitudinem efficit Apotomen primam.

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum^c, latitudinem efficit Apotomen secundam.

Quadratum verò Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum^d, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum^e, latitudinem efficit Apotomen quartam.

At verò quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum^f, latitudinem efficit Apotomen quintam.

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum^g, latitudinem efficit Apotomen sextam.

23. deci-
mi.
98. deci-
mi.
99. deci-
mi.
110. deci-
mi.
101. deci-
mi.
102. deci-
mi.
103. deci-
mi.

Qq

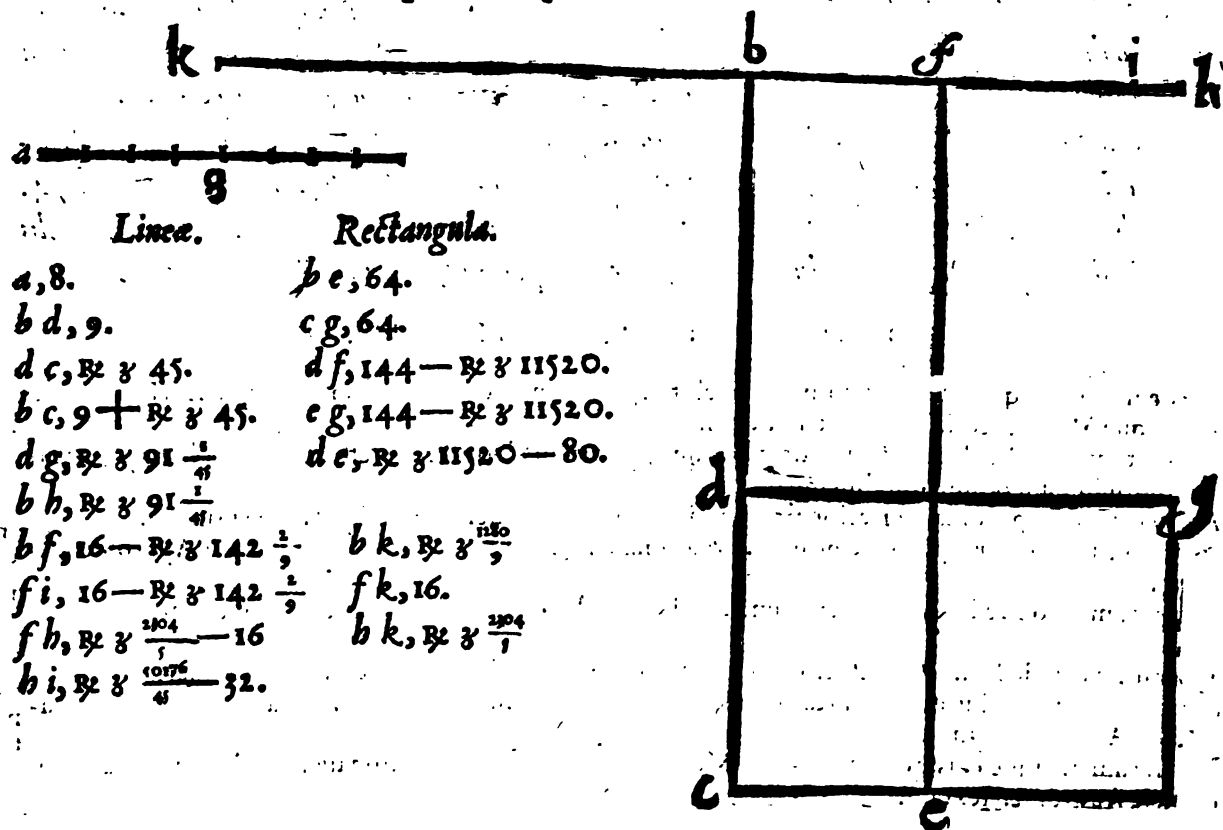
Itaque cum hæ latitudines differant, & à latitudine Mediz, & inter se, à latitudine quidem Mediz, quod hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se differre.

Quoniam verò in hoc theoremate demonstravimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At verò quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò constar, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cum & tam illæ, quàm hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se differentes, de quibus hæcenus disputavimus; hæc scilicet.

- 1 Media.
- 2 Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inventæ.
- 3 Ex binis Mediis prima.
- 4 Ex binis Mediis secunda.
- 5 Maior.
- 6 Rationale, ac Medium potens.
- 7 Bina Media potens.
- 8 Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
- 9 Mediz Apotome prima.
- 10 Mediz Apotome secunda.
- 11 Minor.
- 12 Cum Rationali, Medium totum efficiens.
- 13 Cum Medio Medium totum efficiens.

Theor. 89. Propos. 13.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadē proportionē; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



SIT recta a , Rationalis, & b , c , sit ex binis nominibus vel prima, vel secunda, & c , cuius maius nomen sit b , d , & ad b , c , applicetur rectangulum aequale quadrato ex Rationali a , descripto, faciens latitudinem b , f , Dico rectam b , f , esse Apotomen, cuius nomina hoc est tota b , f , & illi congruens sunt commensurabilia nominibus linea ex binis nominibus b , c , & in eadem proportionem, & denique Apotomen b , f , eandem esse ordine ipsi b , c . Applicetur deinde ad minus nomen d , c , linea ex binis nominibus b , c , rectangulum c , g , quadrato ex Rationali a , aequale, At proinde & rectangulo b , e , faciatque latitudinem d , g , sitque recta d , g , recta b , h , aequalis. Quoniam igitur rectangula b , e , & c , g , aequalia sunt, erit ut b , c , ad d , c , ita d , g , hoc est sibi equalis b , h , ad b , f , ut constat ex propositionibus 14. & 16. lib. 6. & diuidendo ut recta b , d , ad rectam d , c , ita recta h , f , ad rectam f , b , At recta b , d , maior est, quam recta d , c , Quare & h , f , maior erit, quam f , b . Ponatur igitur recta f , i , ipsi f , b , aequalis, & fiat ut h , i , ad i , f , ita f , b , ad b , k . Quare erit componendo ut h , f , ad i , f , hoc est ad sibi aequalem b , f , ita f , k , ad b , k , sed ostendimus esse ut h , f , ad b , f , ita b , d , ad d , c , Quare erit ut b , d , ad d , c , ita f , k , ad b , k , sunt autem recta b , d , d , c , Rationales, & tantum potentia inter se commensurabiles (cum sint nomina linea b , c , ex binis nominibus.) Quare recta f , k , b , k , potentia etiam tantum erunt commensurabiles, ut vult 10. propos. libri huius.

Rursus quia est ut recta h , f , ad rectam b , f , ita recta f , k , ad rectam b , k , erunt quoque h , f , f , k , antecedentes simul, nempe tota h , k , ad b , f , & b , k , consequentes simul, hoc est, ad totam f , k , ut recta f , k , ad rectam b , k , ut vult 12. propos. lib. 5. Quare erit recta f , k , Media proportionalis inter h , k , & b , k , ac propterea ex corollario Clauij propos. 20. lib. 6. erit ut h , k , prima ad b , k , tertiam, ita quadratam ex h , k , prima ad quadratum ex f , k , secunda.

Quoniam verò rectangulum c , g , Rationale existit (est enim rectangulum illud quadrato ex Rationali a , aequale) ad Rationalem d , c , sit applicatum, facit d , g , latitudinem Rationalem, & ipsi d , c , longitudine commensurabilem, ut vult 21. propos. lib. huius. Quare recta h , b , ipsi d , g , aequalis, erit Rationalis, & longitudine commensurabilis ipsi d , c , Cum autem iam sit demonstratum esse, ut recta b , d , ad rectam d , c , ita recta f , k , ad rectam b , k , ut autem recta f , k , ad rectam b , k , ita recta h , k , ad rectam f , k , erit quoque ut b , d , ad d , c , ita recta h , k , ad rectam f , k , ac proinde ex 22. propos. lib. 6. erit quadratum ex recta b , d , ad quadratum ex recta d , c , ut quadratum ex recta h , k , ad quadratum ex recta f , k .

Quadratum autem ex b , d , quadrato ex d , c , est commensurabile, (cum recta b , d , d , c , sint Rationales, & tantum potentia commensurabiles.) Quare quadratum ex recta h , k , Quadrato ex recta f , k , erit commensurabile, ut vult 10. propos. lib. huius.

Sed quadratum ex recta h , k , ad quadratum ex f , k , iam est ostensum esse, ut recta h , k , ad rectam b , k , Quare longitudine sunt commensurabiles h , k , & b , k , ac propterea & reliqua b , h , ex corollario Clauij propos. 16. lib. huius. Rationalis autem est demonstrata recta b , b . Igitur & illi commensurabilis recta h , k , Rationalis est, recta quoque b , k , ipsi Rationali h , k , commensurabilis, Rationalis erit.

Quoniam verò recta f , k , recta b , k , tantum sit commensurabilis potentia ostensa, erit ideo & f , k , Rationalis, ac propterea cum f , k , b , k , sint Rationales, & tantum potentia demonstrata commensurabiles, erit ex 74. propos. lib. huius reliqua b , f , Apotome, & ei congruens b , k . Quod primum erat ostendendum.

Cum autem sit demonstratum rectam h , k , esse parti b , k , longitudine commensurabilem, erunt idcirco recta b , k , b , h , longitudine inter se commensurabiles. Est autem recta b , h , longitudine ostensa commensurabilis ipsi d , c . Quare ex scholio Clauij 12. propos. lib. huius erit b , k , eadem

d, e , longitudine commensurabilis. Rursus cum iam demonstratū sit esse, ut recta b, d , ad rectam d, c , ita recta f, k , ad b, k , Et permutando ut b, d , ad f, k , ita d, c , ad b, k , sunt autem d, c, b, k , longitudine commensurabiles demonstratae. Quare & recta b, d , f, k , longitudine etiam commensurabiles erunt, ex 10. propos. lib. huius. Quare cum recta f, k , ipsi b, d , & recta b, k , ipsi d, c , sit longitudine commensurabilis, erunt nomina ipsius Apotomae f, b , nimirum f, k, i, k , nominibus b, d, d, c , linea ex binis nominibus b, c , commensurabilia longitudine. Quod iterum erat demonstrandū.

Rursus, quia est b, d , ad d, c , ita f, k , ad b, k , erunt igitur nomina f, k, b, k , Apotomae in eadem proportionem cum nominibus b, d, d, c , linea ex binis nominibus b, c , Quod iterum nobis erat demonstrandum.

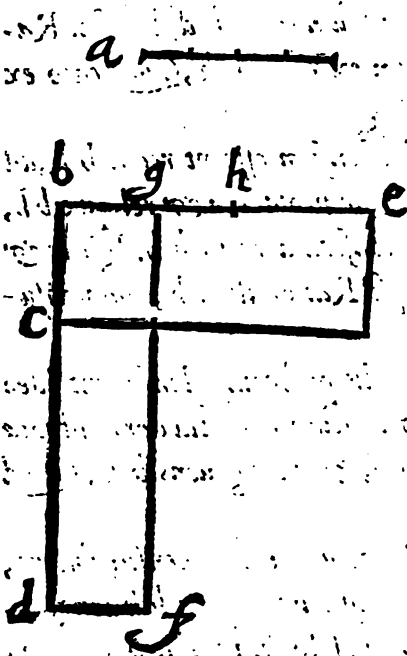
Postremo aut b, d , plus poterit, quam d, c , quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit b, d , quam d, c , quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine. Cum sit ut b, d , ad d, c , ita f, k , ad b, k , poterit quoque ex 15. propos. libri huius, recta f, k , plus, quam b, k , quadrato etiam rectae sibi longitudine commensurabilis.

Si verò plus possit b, d , quam d, c , quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, idem concludes de rectis f, k, b, k , & si recta b, d , Rationali exposte longitudine fuerit commensurabilis, idem dices de recta f, k , ut vult scholium Clauij 12. propos. lib. huius. Si verò d, c , Rationali exposte longitudine sit commensurabilis idem affirmare poteris de recta b, k , Quod si neutra ipsarum b, d, d, c , Rationali exposte longitudine sit commensurabilis, idem dices de rectis f, k, b, k , ex 14. propos. lib. huius.

Quare Apotome, b, f , eadem est ordine linea b, c , ex binis nominibus, ut constat ex definit. tertius & quartus. Quod iterum nobis erat ostendendum. Quadratum igitur Rationalis, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 90. Propos. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomae nominibus, & in eadem proportionem; & adhuc, quae ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.



Linea.

$b, d, 9.$

$b, c, 9 - \frac{1}{2} \text{ Bz } 45.$

$c, d, \frac{1}{2} \text{ Bz } 45.$

$b, g, 1 \frac{1}{2}$

$b, c, 4 \frac{1}{2} \text{ Bz } 8 \frac{1}{2}$

$g, e, \frac{1}{2} \text{ Bz } \frac{1}{2} \text{ Bz } \frac{1}{2}$

Rectangula.

$c, e, 16.$

$b, f, 16.$

$c, g, 16 - \frac{1}{2} \text{ Bz } \frac{1}{2}$

$c, f, \frac{1}{2} \text{ Bz } \frac{1}{2}$

$b, h, 4.$

$h, e, \frac{1}{2} \text{ Bz } \frac{1}{2}$

$g, h, \frac{1}{2}$

Sic

SIT Rationalis a , & recta $b c$, Apotome illique congruens $c d$, & ad rectam $b c$, applicetur rectangulum $c e$, equale quadrato ex Rationali a , faciens latitudinem $b e$. Dico $b e$, esse vnā ex binis nominibus, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus $b d, c d$, Apotome $b c$, & in eadem proportione, & denique $b e$, esse ordine eandem ipsi $b c$, Apotoma.

Rursus ad totam $b d$, aliud rectangulum applicetur quadrato ex Rationali a , equale, sitque illud $b f$, faciens latitudinem $b g$.

Igitur cum rectangula $c e, b f$, aequalia sint, erit $vt b e, ad b g$, ita $b d, ad b c$, vt constat ex 14. & 16. propositionibus lib. 6. & conuertendo, vt $b e, ad g e$, ita $b d, ad c d$.

Secetur quoque $e g$, ad h , secundum proportionem $b e, ad g e$, ex $h s$, quae tradidit Clavius in scholio propof. 16. lib. 6. vt fit $e h$, ad $h g$, quemadmodum $b e, ad g e$.

Quoniam igitur vt tota $b e$, ad totam $g e$, ita $e h$, ex $b e$, ablata ad $h g$, ex $g e$, ablata, erit quoque reliqua $b h$, ipsius $b e$, ad $h e$, reliquam ipsius $g e$, vt tota $b e$, ad totam $g e$, Erat autem vt $b e$, ad $g e$, ita $e h$, ad $h g$, Erit igitur quoque vt $b h$, ad $h e$, ita $e h$, ad $g h$, ac proinde $h e$, Media est proportionalis inter rectas $b h, g h$, Quocirca erit vt prima $b h$, ad $g h$, tertiam, ita quadratum ex $b h$, ad quadratum ex $h e$, secundam ex corollario Clauij propof. 20. lib. 6. Quoniam verò fuit vt $b d$, ad $c d$, ita $b e$, ad $g e$, hoc est $b h$, ad $h e$, sintque $b d, c d$, Rationales potentia tantum commensurabiles (cum sint nomina Apotomae $b c$) erunt igitur $b h, h e$, tantum commensurabiles potentia, & quadrata ex $b b, h h$, commensurabilia, recta etiam $b h, g h$, eandem habentes rationem cum quadratis ex $b h, h e$, vt demonstrauius, sunt longitudine commensurabiles, ac propterea tota $b h$, longitudine existens commensurabilis parti $g h$, longitudine quoque erit commensurabilis reliquae parti $b g$, ex corollario Clauij propof. 16. lib. huius.

Cum autem $b d$, sit Rationalis, nempe maius nomen Apotomae $b c$, sitque rectangulum $b f$, quadrato ex Rationali a , equale, Rationale, erit ex 21. propof. lib. huius recta $b g$, ipsi $b d$, commensurabilis longitudine. Quare ex iis, quae tradidit Clavius in scholio propof. 12. lib. huius recta $b h$, eidem $b d$, Rationalis commensurabilis longitudine, Rationalis est, (sunt enim rectae $b h, h g$, longitudine ostensa commensurabiles.) Quoniam verò $b h, h e$, sunt ostensa potentia tantum commensurabiles, & $b h$, Rationalis sit demonstrata, erit etiam $h e$, illi commensurabilis, Rationalis. Quare $b h, h e$, Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles, ac proinde $b e$, ex illis composita ex binis nominibus est vt vult 37. propof. lib. huius. Quod est primum.

Rursus cum iam à nobis sit ostensum esse $b h$, ad $h e$, vt $b d$, ad $c d$, & permutando vt $b h$, ad $b d$, ita $h e$, ad $c d$, sit autem recta $b h$, demonstrata longitudine commensurabilis ipsi $b d$, erit quoque ex 10. propof. lib. huius recta $h e$, ipsi $c d$, commensurabilis longitudine. Quare $b h, h e$, nomina lineae $b e$, ex binis nominibus longitudine sunt commensurabilia nominibus $b d, c d$, Apotomae $b c$, Quod est secundum. Imo & in eadem proportione, cum sit ostensum esse $b h$, ad $h e$, vt $b d$, ad $c d$, Quod est tertium.

Postremo aut $b d$, plus poterit, quam $c d$, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit, quam $c d$, quadrato recta sibi commensurabilis longitudine, idem concludere poteris de recta $b h$, vt vult 15. propof. lib. huius.

Si verò $b d$, plus possit, quam $c d$, quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, idem dices de $b h$, vt constat ex 15. propof. lib. huius.

Quod si $b d$, Rationali expofita sit longitudine commensurabilis erit & $b h$, eidem longitudine commensurabilis, ex scholio Clauij propof. 12. lib. huius. Si verò $c d$, minus nomen Rationali expofita longitudine commensurabilis existit, idem concludere de recta $h e$. Sed si neutra ipsarum $b d, c d$, Rationali expofita sit longitudine commensurabilis, neutra etiam ipsarum $b h, h e$, ei-

R r

et Rationali expositae a c, longitudine incommensurabilem, ex 23. propos. lib. huius.

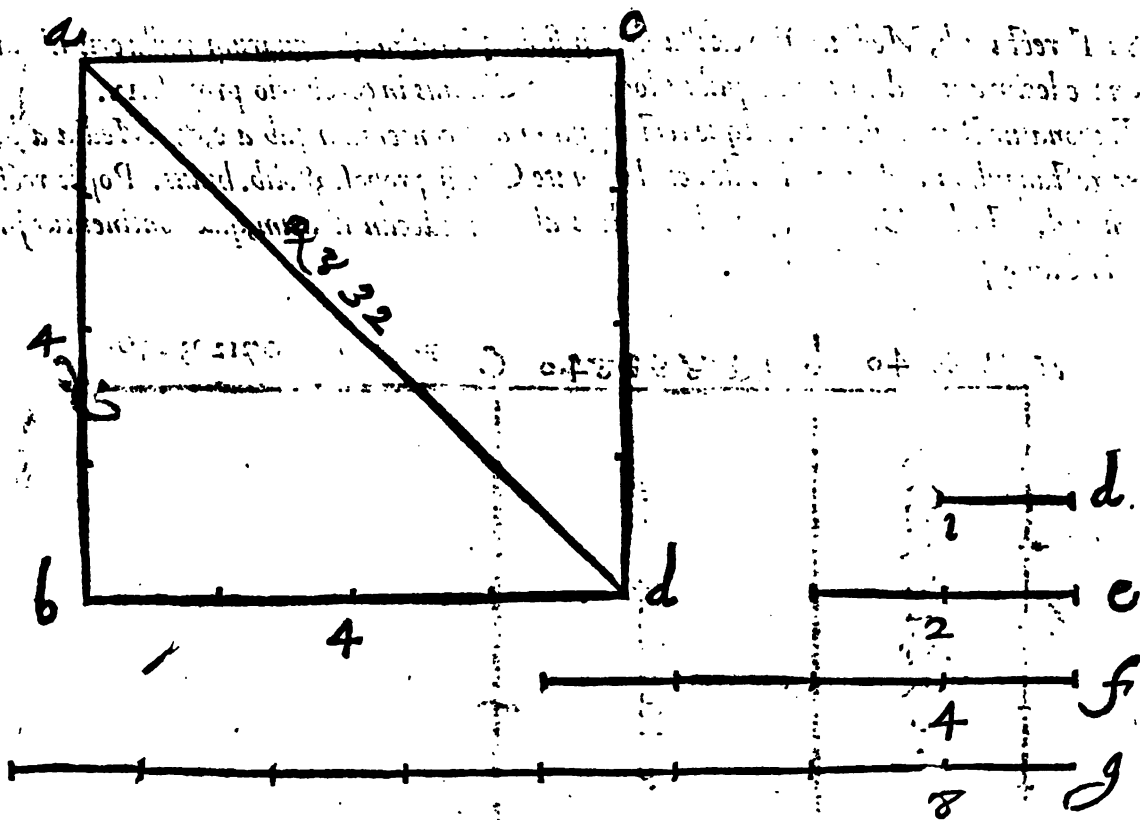
Quadrata verò reliquarum duodecim linearum Irrationalium ad Rationalem applicata, faciant latitudines, vel ex binis nominibus, vel Apotomas, ut propositionibus antecedentibus sunt ostensa. Sed quadratum huius Irrationalis b e, ad eandem Rationalem a c, applicatum latitudinem faciet a b, Mediam. Quare constat lineam Irrationalem b e, non esse unam ex illis tredecim, de quibus loquuti sumus, cum quadratum eius ad Rationalem applicatum latitudinem efficiat differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Si verò rectangulum d e, compleatur contentum sub b d, Rationali, et b e, Irrationali, erit rectangulum illud Irrationale ex lemmate Clayi propos. 38, lib. huius. Possit enim recta e f, rectangulum d e, quæ ex definitione 11, Irrationalis est: Dico rursus e f, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi b e. Hoc enim manifeste iudicatur, cum quadratum eius, ad Rationalem applicatum faciat latitudinem b e, Quadrata verò harum tredecim, si ad eandem Rationalem sint applicata, efficient latitudines prorsus differentes a, b, e, ut iam fuit demonstratum.

Pari ratione alia infinita Irrationales possunt reperiri inter se, et à predictis differentes. Igitur à Media infinita Irrationales sunt. Quod erat ostendendum.

Theor. 93: Propos. 117.

PROPOSITUM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine,



SIT ex a b, descriptum quadratum, cuius diameter sit a d, Dico latus quadrati diametro a d, longitudine esse incommensurabile: Cum enim a b, b d, sint lineæ æquales, erit quadratum ex diametro a d, æquale quadrato ex illis duabus rectis a b, b d, ex 47. lib. 1. id est quadratum diametri, duplum eris quadrato ex latere quadrati.

Suman

Sumantur ex secunda propof. lib. 8. quocumque numeri ab vnitae incipientes in proportione dupla, nimirum in proportione lateris quadrati, & diametri, sintque numeri illi d, e, f, g , id est 1, 2, 4, 8, Quoniam igitur primus ab vnitae non est quadratus, sed primus, nullus alius prater tertium ab vnitae, & vnum relinquentes omnes erit quadratus, vt vult 10. propof. lib. 9. Quare proportio, quae est inter latera quadrati, & diametrum, cadet necessario inter numerum quadratum, & non quadratum, vt nimirum inter numeros d , ad e , vel e , ad f , vel f , ad g , &c. Sed inter hos numeros non reperitur proportio, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, nec etiam inter quadrata laterum quadrati a, c , & diametri a, d , eadem etiam proportio inuenietur. Igitur cum 9. propof. lib. huius recte concluditur latera quadrati a, c , incommensurabilia esse longitudine diametro a, d . Non igitur latus quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

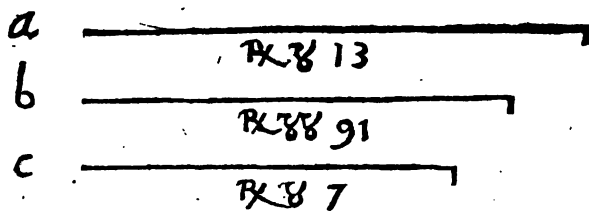
SCHOLIUM EX CLAVIO.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quae in scholio propof. 47. lib. 1. demonstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quocumque numeris ab vnitae 1. 2. 4. 8. 16. 64. &c. solum tertius ab vnitae quadratus est, & ceteri omnes, vnum intermissentes, quod primus ab vnitae, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati, reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum, (alias & 2. quadratus esset) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

Hoc etiam theorema aliter demonstramus ad finem desin. 8. lib. 5. & in scholio propof. 8. lib. 8. & in scholio propof. 9. huius libri.

Ceterum in exemplaribus Graecis reperitur hoc loco appendix quaedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriae libris pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinet: visum est eam paucis ex plicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriae, quae ad demonstrationem eorum, quae hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix haec.

Inuentis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inueniuntur & alia quamplurima magnitudines, plane scilicet, atque solidae incommensurabiles inter se. Sint enim recta a, c , longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit b . Quoniam igitur ex corollario propof. 20. lib. 6. vt a , ad c , ita est figura rectilinea quaevis super a , constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super b , & sunt a, c , longitudine incommensurabiles, erunt rectilinea illa figura super a , & b , incommensurabiles.



Rursus quoniam circuli, quorum diametri a, b , proportionem habent; quam quadrata ex a , & b , descripta: Quadrata autem haec, cum sint figura rectilinea similes, similiterque posita, proportionem habent, quam recta a , & c , ex coroll. propof. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum a, b , eandem proportionem, quam a, c , Sed recta a, c , incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum a, b , incommensurabiles sunt.

Iam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata, eiusdem altitudinis, quorum bases sint figura rectilinea similes, similiterque descripta super a, b , habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea illa figura incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

Quod si coni, vel cylindri aequi alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum a, b , habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum lineae, & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

Eadem autem ratione, si recta a , & b , longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, nec non & ipsarum circulos, commensurabiles esse, atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.



Extrait du Priuilege du Roy.

PAR Priuilege du Roy, il est permis à Iean de Heuqueuille, d'imprimer ou faire imprimer, vendre & distribuer vn Liure intitulé *Euclidis elementum decimum, in quo singularum demonstrationum lineæ, & superficies, tam Commensurabiles, & Incommensurabiles, Quam Rationales, & Irrationales, accuratè numeris exprimuntur. Authore Florimondo Puteano, Vtani Domino*: Auec defences à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer ou faire imprimer, ny exposer en vente ledict Liure, sans le consentement dudit de Heuqueuille, iusques à six ans finis & accomplis, à compter du iour qu'ils seront acheuez d'imprimer, à peine de confiscation desdits Liures & exemplaires qui se trouueront imprimez d'autre impression que de la sienne, comme plus amplement est porté par ledit Priuilege. Donné à Paris le 28. Aueil mil six cens douze.

PAR LE CONSEIL.

Signé

BERGERON.

E R R A T A.

Pagina quinta, linea vigesima prima, aream quendam, lege aream quandam.

Pagina 9. linea duodecima, metietur quædam reliqua præcedentem, lege præcedentem.

Omissa in margine.

Pagina 114. linea 14. 37. decimi. Pagina 115. linea 4. 38. decimi, linea 30. 39. decimi.

Pagina 116. linea 19. 40. decimi. Pagina 117. linea 10. 41. decimi. Pagina 118. linea 5. 42. decimi. Pagina 131. linea 36. lege Apotoma.

